Vecteurs

Table des matières

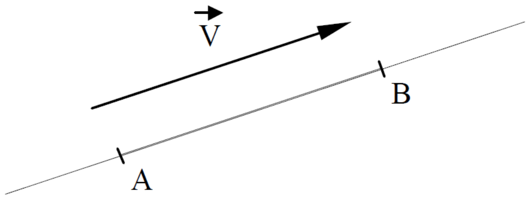
I Vecteurs

Définition : Vecteur libre

Soient A et B, deux points de l'espace. Le **vecteur libre** $\overrightarrow{AB} = \vec{V}$ désigne **l'un des** bipoints équipollents au bipoint (A, B).

Il est caractérisé par :

1. une **direction**
2. un **sens**
3. une **norme**, ou **intensité**, ou **module**



Définition : Vecteur glissant

Le **vecteur glissant** $(A, \vec{V})$ désigne l'un des bipoints équivalents au bipoint (A, B) qui ont la même droite **support** que (A,B).

Il est caractérisé par :

1. un **support** (une direction et un point)
2. un sens
3. une norme

L'ensemble des vecteurs glissants est appelé **glisseur**.

Définition : Vecteur lié

Le vecteur lié $[\vec{V}]$ est le représentant du bipoint (A, B), et a pour origine A.

Il est caractérisé par :

1. une **origine**
2. une direction
3. un sens
4. une norme

Définition : Norme

La norme d'un vecteur est notée $||\overrightarrow{AB}||$ et est positive.

On peut l'obtenir en calculant la racine carrée du *produit scalaire* *(cf. p.7)* du vecteur avec lui-même : $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AB}}$

II Base et repère

Définition : Base

Dans un espace vectoriel à trois dimensions, le triplet $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de vecteurs linéairement indépendants désigne une **base** (b_1, par exemple).

Elle est dite **orthogonale** si les produits scalaires des vecteurs pris deux à deux sont nuls :

$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0, \forall (i,j) \in (1,2,3)$ avec $i \neq j$

Elle est dite **orthonormée** si, en plus, la norme des vecteurs vaut **1** :

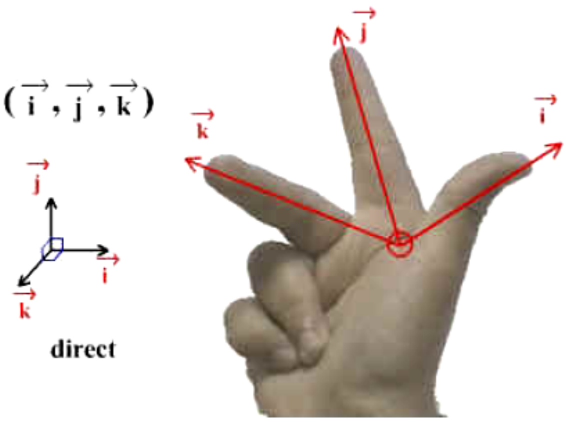
$\forall (i,j) \in (1,2,3), \|\vec{e}_i\| = 1$

Elle est dite **orthonormée directe** si enfin $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ forme un **trièdre direct** (c'est-à-dire si $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$)

Fondamental : Trois doigts de la main droite

Une astuce simple pour vérifier si un trièdre est direct, est d'utiliser les trois doigts de la main droite. **Dans l'ordre de lecture** du triplet de vecteurs, par exemple $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

- le **premier** vecteur $\vec{i}$ est associé au **pouce**
- le **deuxième** vecteur $\vec{j}$ est associé à l'**index**
- le **troisième** vecteur $\vec{k}$ est associé au **majeur**, qui se déploie perpendiculairement au plan formé par le pouce et l'index.



Attention :

Ne pas se tromper de main : la main gauche donnerait un trièdre indirect !

Définition : Repère

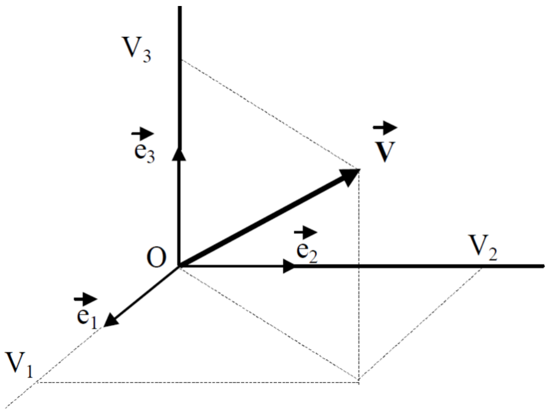
En associant un point (par exemple A) à cette base, on obtient un repère $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, aussi noté (A, b_1).

III Composantes d'un vecteur

1. Composantes scalaires d'un vecteur dans l'espace

On peut exprimer un vecteur à l'aide d'une combinaison linéaire de ses composantes scalaires dans cette base.

1.1. en coordonnées cartésiennes



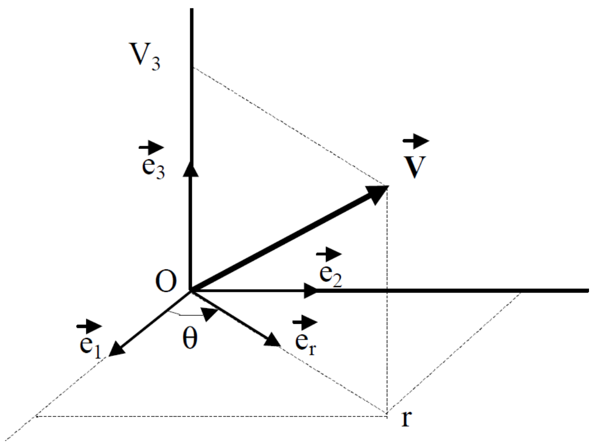
$\vec{V} = V_1\,\vec{e}_1 + V_2\,\vec{e}_2 + V_3\,\vec{e}_3$

¶ *Syntaxe* : Écriture "colonne" d'un vecteur

Afin d'écrire de manière concise et détaillée un vecteur grâce à ses composantes, on utilise la présentation suivante : $\vec{V} = \left\{\begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{matrix}\right\}_{b_1}$, ou $\vec{V} = {}_{b_1}\left|\begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{matrix}\right.$

V_1, V_2 et V_3 sont appelées les **coordonnées** du vecteur V.

1.2. en coordonnées cylindriques

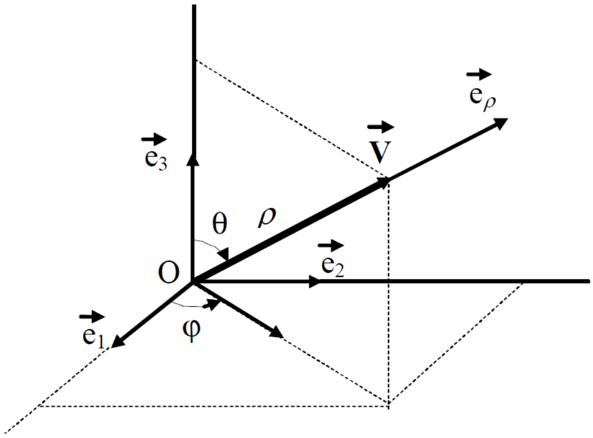


$\vec{V} = r\,\vec{e}_r + V_3\,\vec{e}_3$

***Remarque* :**

$\vec{e}_r$ est de norme unitaire mais **n'est pas fixe** par rapport à la base b_1.

1.3. en coordonnées sphériques



$\vec{V} = \rho\,\vec{e}_\rho$

Remarque :

$\vec{e}_\rho$ est de norme unitaire mais n'est pas fixe par rapport à la base b_1.

2. Composantes vectorielles d'un vecteur dans l'espace

On reprend l'exemple précédent, où $\vec{V} = V_1\,\vec{e}_1 + V_2\,\vec{e}_2 + V_3\,\vec{e}_3$.

- V_1 est un scalaire, et fournit une **intensité** (norme, module).
- $\vec{e}_1$ est un vecteur de norme unitaire, et fournit un **sens** et une **direction**.

$V_1\vec{e}_1$ peut très bien être écrit $\overrightarrow{V_1}$

Ainsi : $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$: ce vecteur est la somme de ses trois **composantes vectorielles**.

Remarque :

Écrire $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$ ne fait plus apparaître la base explicitement, alors que l'écriture $\vec{V} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix}_{b_1}$, si.

On privilégiera donc cette dernière lorsque l'on veut indiquer clairement la **base d'expression** du vecteur.

IV Opérations vectorielles

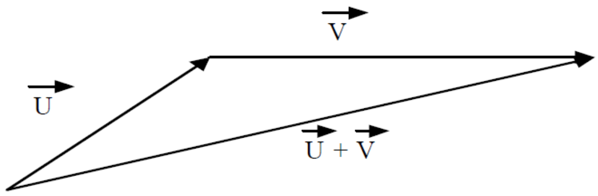
Soit B $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée directe.

Soient U_1, U_2, U_3 et V_1, V_2, V_3 les coordonnées respectives de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans la base B :

$\vec{U} = {}_B\left|\begin{matrix}U_1\\U_2\\U_3\end{matrix}\right.$ et $\vec{V} = {}_B\left|\begin{matrix}V_1\\V_2\\V_3\end{matrix}\right.$

1. Somme

$$\vec{U} + \vec{V} = (U_1 + V_1)\,\vec{e}_1 + (U_2 + V_2)\,\vec{e}_2 + (U_3 + V_3)\,\vec{e}_3$$



2. Produit scalaire

Définition :

Le produit **scalaire** de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est le **nombre réel** noté $\vec{U}\ .\ \vec{V}$ tel que :

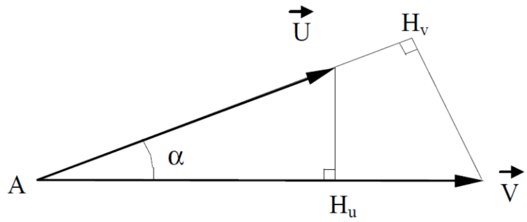
$$\vec{U}.\vec{V} = ||\vec{U}||.\,||\vec{V}||.\cos\ (\vec{U}, \vec{V})$$

Propriétés

- **Symétrie** : $\vec{U}.\vec{V} = \vec{V}.\vec{U}$
- **Bilinéarité** : $\vec{U}.(\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U}.\vec{V} + \vec{U}.\vec{W}$
- **Multiplication par un scalaire** : $k(\vec{U}.\vec{V}) = (k\,\vec{U}).\vec{V} = \vec{U}.(k\,\vec{V})$

Remarque : **Lien entre produit scalaire et projections**

- $\overline{AH_u} = \frac{\vec{U}.\vec{V}}{||\vec{V}||}$
- $\overline{AH_v} = \frac{\vec{U}.\vec{V}}{||\vec{U}||}$



Dans le cas où $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont **unitaires** (de norme 1), les **projections** $\overline{AH_u}$ et $\overline{AH_v}$ sont **identiques**.

Avec les coordonnées des vecteurs exprimées dans une base orthonormée (rare en SII)

$$\vec{U}.\vec{V} = U_1.V_1 + U_2.V_2 + U_3.V_3$$

Fondamental :

Si le produit scalaire est **nul**, alors : $\vec{U} = \vec{0}$, ou $\vec{V} = \vec{0}$,

ou $\cos(\vec{U}, \vec{V}) = 0$ c'est-à-dire que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont **orthogonaux**.

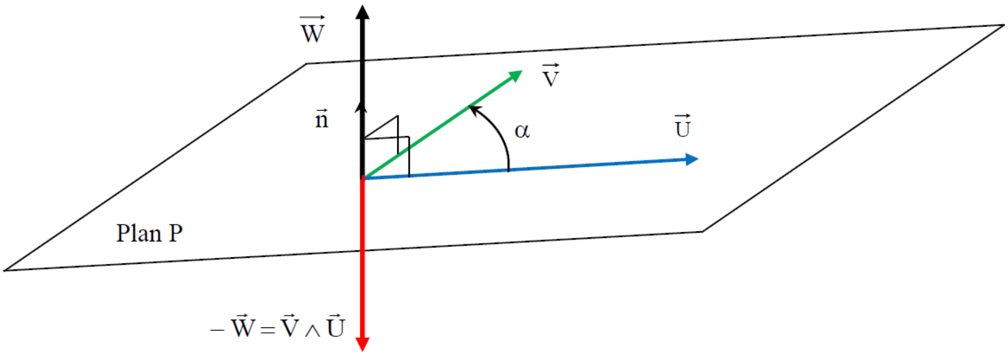
3. Produit vectoriel

Définition :

Le produit **vectoriel** de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est le **vecteur** $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ tel que :

$$||\vec{U} \wedge \vec{V}|| = ||\vec{U}||.\,||\vec{V}||.\,|\sin\ (\vec{U}, \vec{V})|$$

- $\vec{W}$ est orthogonal à $\vec{U}$ et à $\vec{V}$
- $\vec{U}, \vec{V}$ et $\vec{W}$ forment un **trièdre direct**.



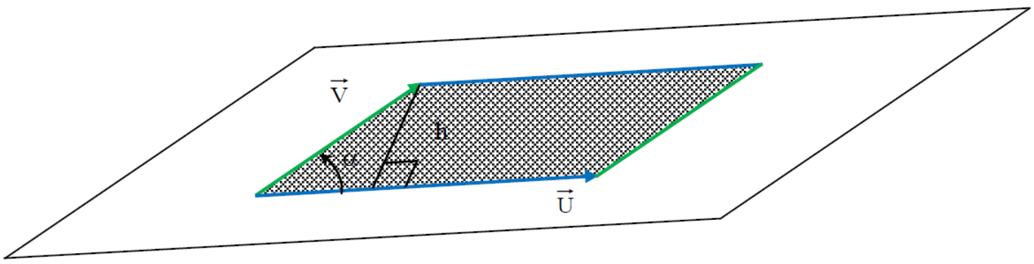
Propriétés

- **Antisymétrie** : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}$
- **Bilinéarité** : $\vec{U} \wedge (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \vec{W}$
- **Multiplication par un scalaire** : $k(\vec{U} \wedge \vec{V}) = (k\,\vec{U}) \wedge \vec{V} = \vec{U} \wedge (k\,\vec{V})$

Remarque : **Lien entre produit vectoriel et aire d'un parallélogramme**

La norme du produit vectoriel $||\vec{U} \wedge \vec{V}||$ correspond à l'aire du parallélogramme défini par les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$:

$||\vec{U} \wedge \vec{V}|| = ||\vec{U}||.\,||\vec{V}||.\,|\sin\alpha| = ||\vec{U}||.\,h$



Avec les coordonnées des vecteurs exprimées dans une base orthonormée (rare en SII)

$\vec{U} \wedge \vec{V} = (U_2.\,V_3 - U_3.\,V_2)\,\vec{e}_1 + (U_3.\,V_1 - U_1.\,V_3)\,\vec{e}_2 + (U_1.\,V_2 - U_2.\,V_1)\,\vec{e}_3$

Fondamental :

Si le produit vectoriel est **nul**, alors $\vec{U} = \vec{0}$, ou $\vec{V} = \vec{0}$,

ou $\sin(\vec{U}, \vec{V}) = 0$ c'est-à-dire que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont **colinéaires**.

4. Produit mixte

Définition :

Le **produit mixte** de $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ est le **nombre réel** $[\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}]$ tel que :

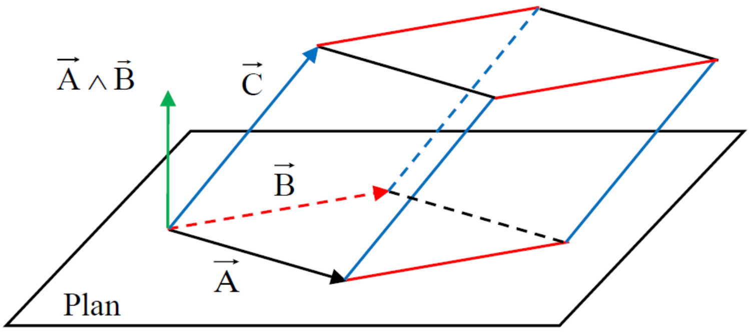
$$[\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}] = \left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right).\vec{W}$$

Propriétés

- **Invariance par permutation circulaire** : $\left[\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}\right] = \left[\vec{V}, \vec{W}, \vec{U}\right] = \left[\vec{W}, \vec{U}, \vec{V}\right]$
- (Antisymétrie par permutation non-circulaire)

Remarque : Lien entre produit mixte et volume d'un parallélépipède

Soient trois vecteurs (non nuls et non colinéaires) $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$. Le volume du parallélépipède formé par ces trois vecteurs est donné par $V = |(\vec{A} \wedge \vec{B}).\vec{C}|$



Fondamental :

Soient les vecteurs non nuls $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$: si $\left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right).\vec{W} = 0$ alors les trois vecteurs sont **coplanaires**.

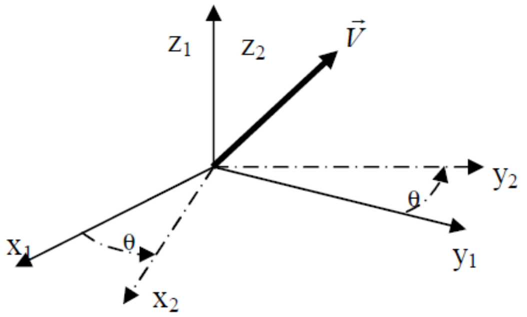
En effet : le vecteur $\vec{U} \wedge \vec{V}$ est (par définition du produit vectoriel) perpendiculaire au plan formé par $\vec{U}$ et $\vec{V}$. Et si son produit scalaire avec $\vec{W}$ est nul, c'est que $\vec{W}$ lui est perpendiculaire. Donc ce dernier appartient au plan formé par $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

V Changement de base

1. Bases 1 et 2 : exemple simple

On considère deux bases déduites l'une de l'autre par une rotation autour d'un des vecteurs. Ici la rotation se fait autour de $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$ avec l'angle θ.

Ainsi : $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$.



Méthode : Changement de base par projection orthogonale

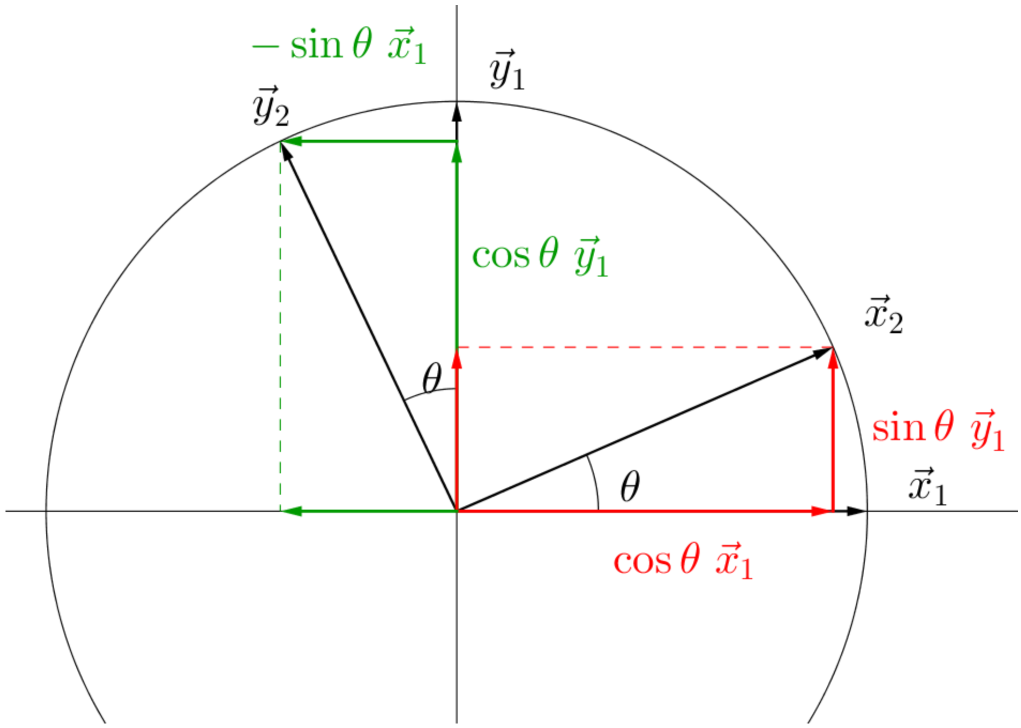
Chaque vecteur unitaire de la base b_1 peut être exprimé dans la base b_2, et vice-versa.

Il est utile de se représenter mentalement le cercle trigonométrique (ici dans le plan $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$) où tous les vecteurs des bases, étant unitaires, auront leur extrémité sur le cercle de rayon 1.

La projection orthogonale va consister à **remplacer un** vecteur d'une base par la **somme** de **deux** vecteurs orthogonaux appartenant à l'autre base. L'ensemble des trois vecteurs tracés fera penser à un triangle rectangle où :

- le vecteur projeté correspondra à l'hypoténuse
- les deux vecteurs sommés correspondront aux côtés adjacent et opposé.

Par exemple : $\vec{x}_2$ sera **remplacé** par $\cos\theta\vec{x}_1 + \sin\theta\vec{y}_1$.



2. Projection et produit scalaire

On retrouve facilement les termes $\cos\theta$ et $\sin\theta$ grâce au produit scalaire :

- projection de $\vec{x}_2$ sur $\vec{x}_1$: $\vec{x}_2.\,\vec{x}_1 = ||\vec{x}_2||.\,||\vec{x}_1||.\cos(\vec{x}_2, \vec{x}_1) = \cos(-\theta) = \cos\theta$
- projection de $\vec{x}_2$ sur $\vec{y}_1$: $\vec{x}_2.\,\vec{y}_1 = ||\vec{x}_2||.\,||\vec{y}_1||.\cos(\vec{x}_2, \vec{y}_1) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

VI Entraînement

1. Exercice : Passage de la base 2 vers la base 1

Soit $\vec{V} = a\vec{x}_2 + b\vec{y}_2 + c\vec{z}_2$.

Exprimer $\vec{V}$ dans la base b_1.

- ○ $\vec{V} = \left|\begin{matrix} a\ \cos\theta + b\ \sin\theta \\ a\ \sin\theta + b\ \cos\theta \\ c \end{matrix}\right._{b_1}$

- ○ $\vec{V} = \left|\begin{matrix} a\ \cos\theta - b\ \sin\theta \\ a\ \sin\theta + b\ \cos\theta \\ c \end{matrix}\right._{b_1}$

- ○ $\vec{V} = \left|\begin{matrix} a\ \cos\theta - b\ \sin\theta \\ -a\ \sin\theta + b\ \cos\theta \\ c \end{matrix}\right._{b_1}$

- ○ $\vec{V} = \left|\begin{matrix} a\ \cos\theta - b\ \sin\theta \\ -a\ \sin\theta + b\ \cos\theta \\ c \end{matrix}\right._{b_2}$

- ○ $\vec{V} = \left|\begin{matrix} -a\ \cos\theta - b\ \sin\theta \\ a\ \sin\theta + b\ \cos\theta \\ c \end{matrix}\right._{b_1}$

2. Exercice : Passage de la base 1 vers la base 2

Soit $\vec{V} = a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1 + c\vec{z}_1$. Exprimer $\vec{V}$ dans la base b_2.

- ○ $\vec{V} = \left|\begin{matrix} -a\ \cos\theta - b\ \sin\theta \\ -a\ \sin\theta + b\ \cos\theta \\ c \end{matrix}\right._{b_2}$

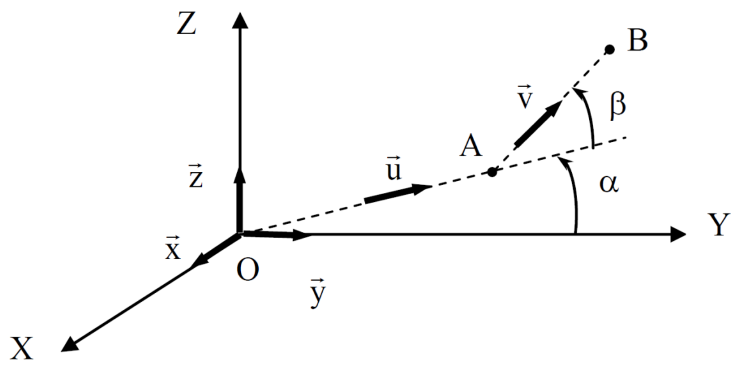
- ○ $\vec{V} = \left|\begin{matrix} a\ \cos\theta + b\ \sin\theta \\ -a\ \sin\theta + b\ \cos\theta \\ c \end{matrix}\right._{b_1}$

- ○ $\vec{V} = \left|\begin{matrix} a\ \cos\theta + b\ \sin\theta \\ -a\ \sin\theta + b\ \cos\theta \\ c\ \cos\theta \end{matrix}\right._{b_2}$

- $\vec{V} = \left|\begin{array}{c} a\ \cos\theta + b\ \sin\theta \\ -a\ \sin\theta + b\ \cos\theta \\ c \end{array}\right._{b_2}$

3. Exercice : Vecteurs et opérations vectorielles

Soit $R(O;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère orthonormé direct. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont des vecteurs unitaires définis dans le plan $(O;\vec{y},\vec{z})$ comme le montre la figure ci-dessous :



Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ est défini par : $\overrightarrow{OA} = a\vec{u}$, et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AB} = b\vec{v}$.

Question 1

Définir les **coordonnées** du vecteur $\overrightarrow{OB}$ dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ en fonction de a, b, α et β.

Question 2

Déterminer la **norme** du vecteur $\overrightarrow{OB}$.

Question 3

Définir l'angle γ tel que $\gamma = (\vec{y},\overrightarrow{OB})$.

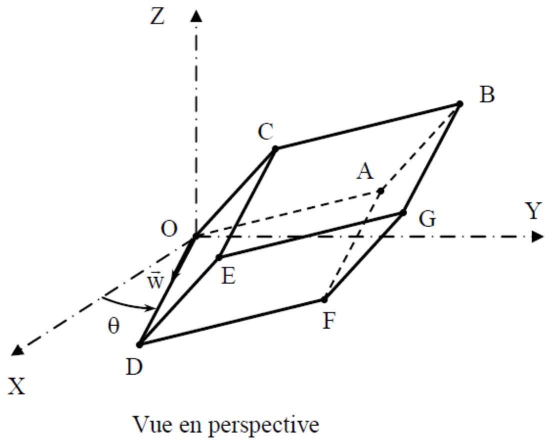
Question 4

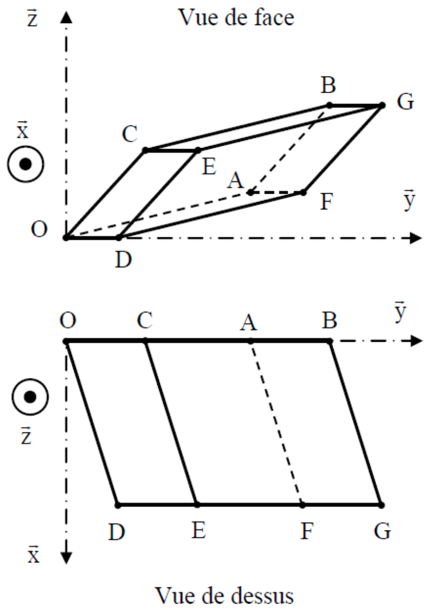
Calculer : $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$, $\vec{x} \wedge \vec{u}$, $\vec{y} \wedge \vec{v}$, et $(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}).\,\vec{x}$.

Question 5

On donne : $\overrightarrow{OD} = c\vec{w}$ avec $||\vec{w}|| = 1$ et $\vec{w}.\,\vec{z} = 0$.

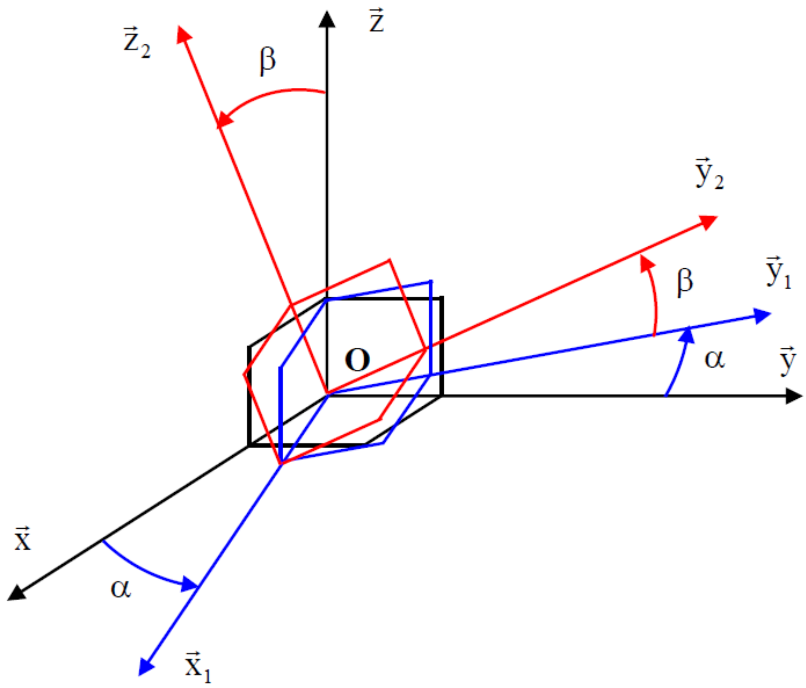
Déterminer en fonction de a, b, c, β et θ le volume défini par les figures ci-après.





4. Exercice : Changements de base

Soit $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct. La base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ est définie par une rotation de la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ autour de $\vec{z}$ d'un angle α (défini positif). La base $(\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est définie par une rotation de la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ autour de $\vec{x}_1$ d'un angle β (défini positif).



Question 1

Tracer deux figures représentant les différentes bases sous forme de projections orthogonales par rapport aux vecteurs de rotation.

Question 2

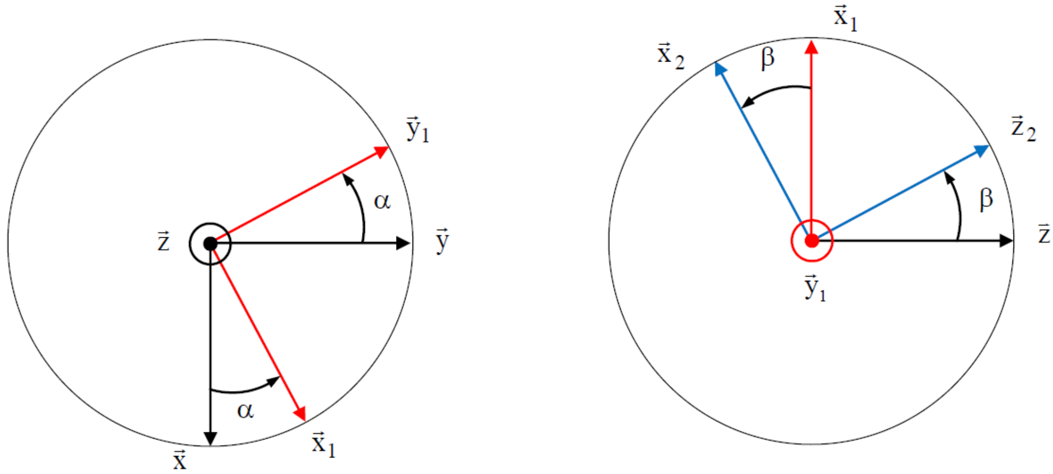
Calculer : $\vec{x} \wedge \vec{z}_2$, $\vec{y} \wedge \vec{z}_2$ et $\vec{y}_1 \wedge \vec{z}_2$.

Question 3

Calculer $(\vec{x} \wedge \vec{y}_2) . \vec{x}_1$.

5. Exercice : Pertinence du choix de la base

Soient les bases $B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ et $B_2(\vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$.



Question 1

Calculer $\vec{x} \wedge \vec{x}_2$, $\vec{y} \wedge \vec{x}_2$ et $\vec{y}_1 \wedge \vec{x}_2$.

Question 2

Calculer $(\vec{x} \wedge \vec{x}_2) . \vec{z}_2$.

Question 3

Soit la relation vectorielle suivante : $a\vec{x}_2 - b\vec{y}_1 - c\vec{z}_2 = \vec{0}$ **(1)**.

Donner le système d'équations scalaires issu de la projection de l'équation vectorielle **(1)** dans la base B.

Donner le système d'équations scalaires issu de la projection de l'équation vectorielle **(1)** dans la base B_2.

Conclure.