Modéliser les SLCI : outils

Table des matières

I Modéliser les entrées

Introduction

Pour étudier le comportement d'un système, il est souvent difficile de traduire sous forme d'équations les lois de la physique qui régissent son comportement. On le soumet alors à des signaux tests simples et on observe sa sortie.

De plus, la définition des critères de performances se fait principalement à partir de ces signaux.

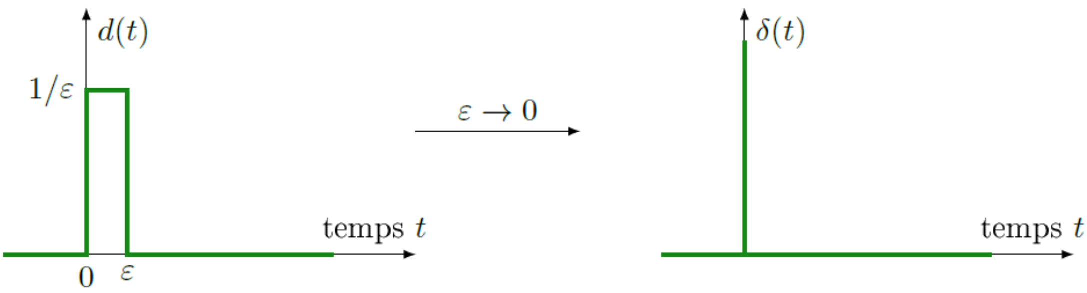
Pour les temps négatifs, les signaux seront toujours considérés à valeur nulle.

1. Impulsion de Dirac

Impulsion de Dirac — **Az** Définition

Si $t \neq 0,\ \delta(t) = 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\ dt = 1$

L'impulsion de Dirac est une entrée qui modélise une excitation du système sur un temps extrêmement court, mais suffisamment significatif pour que l'on puisse en observer les effets.



Impulsion de Dirac

Exemple

Coup de marteau sur une plaque métallique, frappe piquée sur une corde de piano...

Remarque

Mathématiquement, l'impulsion de Dirac n'est pas une fonction mais une **distribution**, définie comme nulle pour tout temps différent de zéro et telle que l'intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1.

L'impulsion de Dirac peut être considérée comme la limite d'un créneau $d(t)$ de largeur ε et de hauteur $\frac{1}{\varepsilon}$ quand ε tend vers zéro.

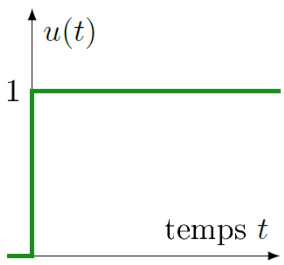
2. Fonction échelon unité u(t)

Fonction échelon unité u(t) Az Définition

si $t < 0,\ u(t) = 0$ mais si $t \geq 0,\ u(t) = 1$

Cette fonction respecte le **principe de causalité**, c'est-à-dire qu'elle est nulle pour les temps négatifs. En effet, l'ensemble des paramètres est supposé être au repos dans les temps négatifs.

Cette fonction modélise un signal qui passe de la valeur nulle à la valeur 1 très rapidement et qui reste ensuite constamment égal à 1.



Fonction échelon unité

Exemple

Fermeture d'un interrupteur électrique

Attention

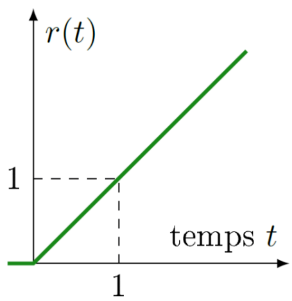
Ne pas confondre la notation $u(t)$ avec la notion de tension électrique !

3. Fonction rampe unitaire r(t)

Fonction rampe unitaire r(t) Az Définition

si $t < 0,\ r(t) = 0$ mais si $t \geq 0,\ r(t) = t$

La fonction rampe peut donc s'exprimer à l'aide de la fonction échelon unitaire : $r(t) = t\,u(t)$.



Fonction rampe unitaire

Exemple

Déplacement imposé à vitesse constante.

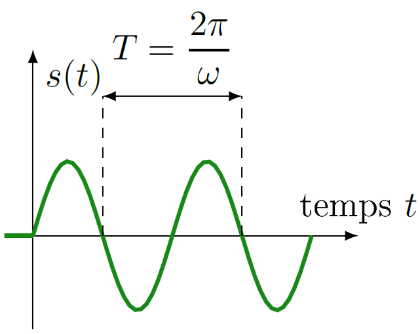
4. Fonction sinus causale s(t)

Az Définition

- si $t < 0,\ s(t) = 0$
- si $t \geq 0,\ s(t) = \sin(\omega t)$

Cela peut être simplifié en utilisant la fonction échelon : $s(t) = \sin(\omega t)\, u(t)$.

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ est appelée **pulsation** du sinus, et T la **période**.



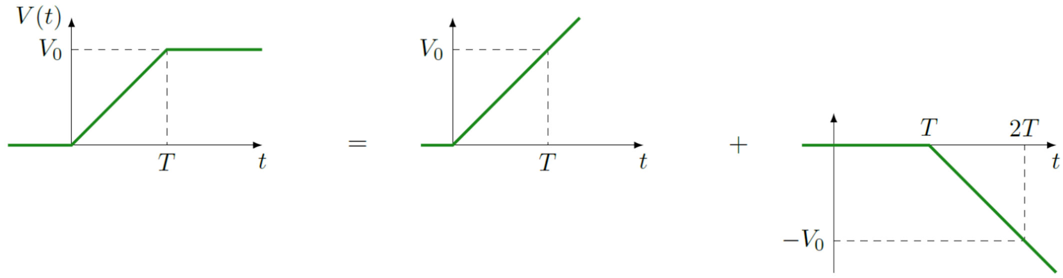
Fonction sinus causale

5. Signaux composés de signaux élémentaires

Tout **signal affine par morceaux** peut s'écrire comme la **somme de signaux élémentaires** en utilisant des fonctions échelon et rampe, éventuellement retardées.

Ces signaux composés sont souvent utilisés pour la commande des systèmes.

Exemple



Consigne de vitesse de déplacement d'un ascenseur

Ce signal peut être décomposé en une somme de deux signaux élémentaires :

$V(t) = \frac{V_0}{T} t\, u(t) - \frac{V_0}{T}(t-T)\, u(t-T)$, où $u(t-T)$ est la fonction échelon retardée d'un temps T (la fonction passe à 1 lorsque $t = T$).

Équation d'un droite

Rappel

L'équation d'une droite dans le plan est usuellement définie par : $y = ax + b$ avec a : coefficient directeur de la droite et b : ordonnée à l'origine

Une expression plus intéressante (car adaptée à tous les cas) est celle utilisant les valeurs en deux points quelconques : $y_2 = a(x_2 - x_1) + y_1$ avec : $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$ les coordonnées de deux points quelconques de la droite.

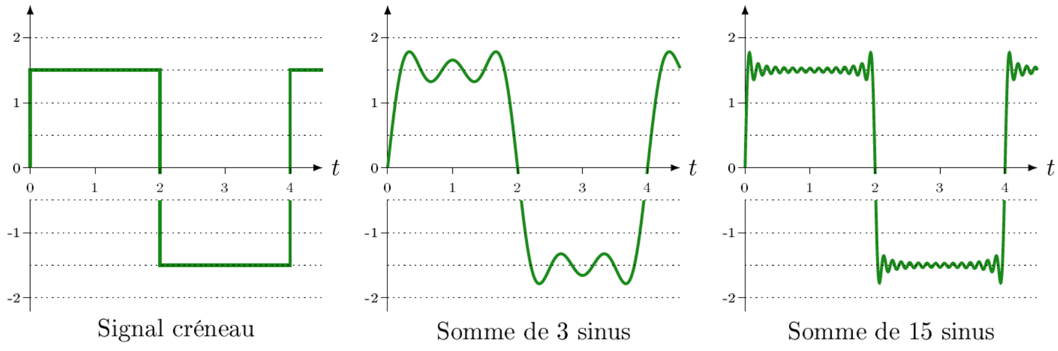
Le coefficient directeur de la droite pourra s'obtenir par : $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

6. Décomposition en série de Fourier

Complément

Dans la réalité, le signal d'entrée d'un système est rarement un signal simple (de type échelon ou rampe). La théorie développée par Fourier permet de considérer que tout signal (périodique ou non) résulte de la somme, souvent infinie, d'un ensemble de composantes sinusoïdales de fréquences et d'amplitudes différentes.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830)



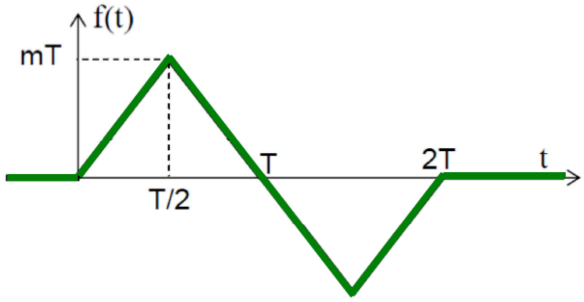
Décomposition en série de Fourier d'un signal créneau

La réponse d'un système à un signal quelconque peut donc se déduire de l'ensemble de ses réponses à des signaux sinusoïdaux répartis dans une plage de fréquence adaptée.

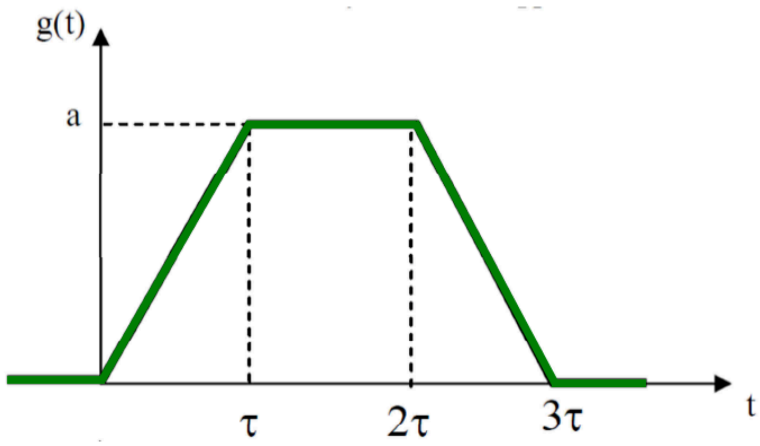
7. Exercice : Signaux composés

Déterminer l'équation temporelle des signaux suivants.

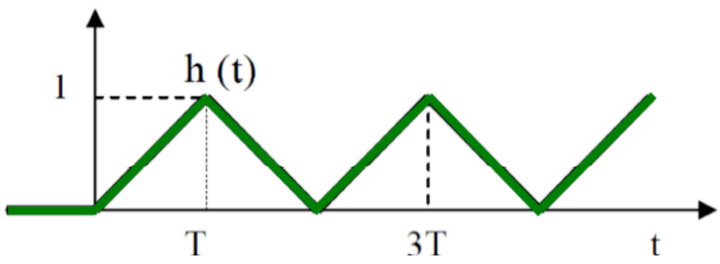
Question 1



Question 2



Question 3



II Hypothèses : Systèmes Linéaires Continus Invariants

Introduction

On choisit de représenter un système ou sous-système sous la forme d'un bloc pour lequel les **entrées** (ou causes) du système sont généralement situées à **gauche** (flèche entrant dans le bloc) et les **sorties** (effets) sont généralement situées à **droite** (flèche sortant du bloc). L'intérieur du bloc contient une description du système étudié en terme de comportement.

On ne s'intéresse ici qu'aux systèmes mono-variables, c'est à dire aux systèmes qui ne possèdent qu'une seule entrée et qu'une seule sortie.

1. Système linéaire

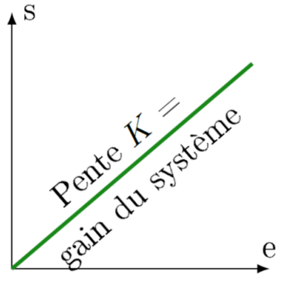
Az Définition

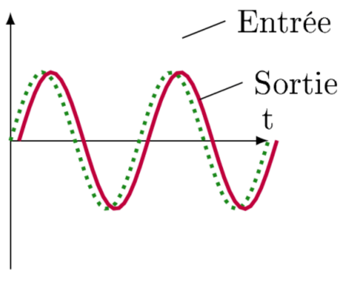
Un système est dit **linéaire** si la fonction qui le décrit est elle même linéaire. Cette fonction vérifie alors le principe de **proportionnalité** et de **superposition**.

Remarque

- En relevant la valeur asymptotique de la sortie (régime établi ou permanent) pour différentes entrées échelon, on peut obtenir la caractéristique du système : $sortie = f(entree)$.

  Dans le cas d'un système linéaire, cette courbe est une droite de pente **K** appelé **gain du système**.
- La réponse d'un système linéaire en régime établi est de même nature que l'entrée.





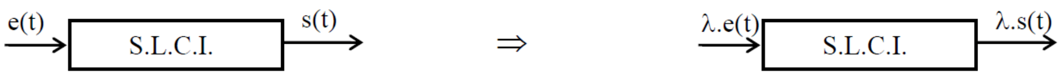
Attention

Ne pas confondre la caractéristique d'un système $s = f(e)$ avec la courbe $s(t)$ qui représente l'évolution temporelle de la sortie et qui est très souvent non-linéaire.

1.1. Principe de proportionnalité

Principe de proportionnalité — Az Définition

Si $s(t)$ est la réponse à l'entrée $e(t)$, alors $\lambda s(t)$ est la réponse à l'entrée $\lambda e(t)$.

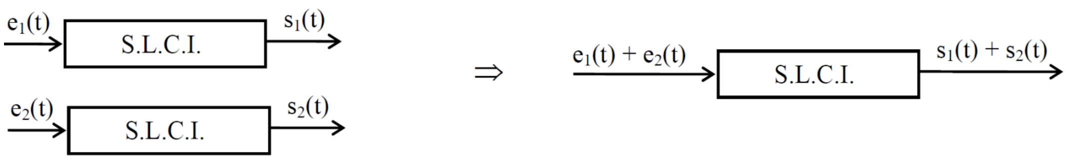


Proportionnalité

1.2. Principe de superposition

Principe de superposition — Az Définition

Si $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont les réponses respectives des entrées $e_1(t)$ et $e_2(t)$, alors $s_1(t)$ + $s_2(t)$ est la réponse à l'entrée $e_1(t)$ + $e_2(t)$



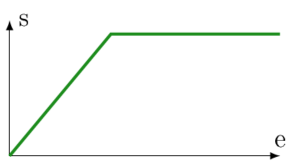
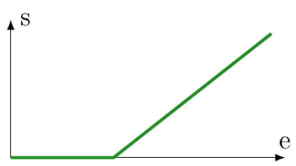
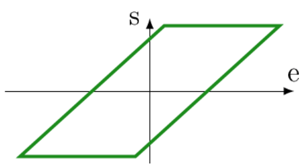
Superposition

En étudiant les réponses du système pour des entrées simples (comme les signaux tests), et en utilisant les propriétés de linéarité (proportionnalité et superposition), il est alors possible d'obtenir la réponse du système à des signaux plus complexes.

1.3. Non linéarités

La plupart des systèmes physiques ne sont pas linéaires sur la totalité de leur domaine d'utilisation.

Ci-après, quelques exemples de non-linéarités couramment rencontrés avec leur courbe caractéristique $s = f(e)$ associée.

	Saturation	Seuil	Hystérésis
Courbe caractéristique			
Exemple	Butée mécanique, alimentation, moteur électrique...	Frottement dans un moteur	Jeux mécaniques, élastomères, cycles magnétiques...

Linéarisation

Cependant, lorsque le système est utilisé dans une zone réduite du domaine d'application, il est possible de "linéariser" la réponse du système dans cette zone autour d'un point de fonctionnement de la caractéristique.

Il s'agit souvent en pratique d'une approximation par la tangente au point de fonctionnement, appelée "linéaire tangente". Le système est alors dit linéarisé.

Linéarisation d'un système non linéaire au voisinage d'un point

2. Système continu

Az Définition

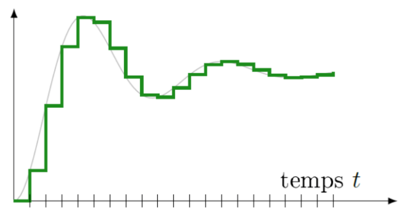
Un système est continu, par opposition à un système discret, lorsque les variations de ses grandeurs physiques sont définies à chaque instant (elles sont caractérisées par des fonctions continues). On parle aussi de systèmes analogiques.

La plupart des systèmes physiques, d'un point de vue macroscopique, sont continus. Dans les systèmes de commande modernes, l'information est traitée, le plus souvent, par des systèmes informatiques ce qui nécessite un échantillonnage des signaux. On parle dans ce cas de systèmes échantillonnés ou discrets.

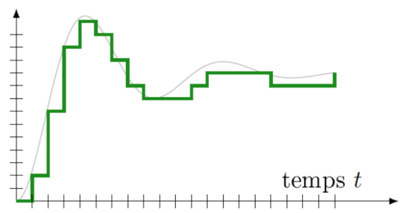
Remarque

Lorsqu'un signal continu est numérisé pour être traité par un micro-contrôleur il subit deux discrétisations :

- un **échantillonnage en temps** : la valeur du signal est prélevée tous les pas de temps (elle est considérée comme constante au cours du pas de temps par le système de commande)



- une **quantification** : la mesure est mémorisée de façon discrète dans le contrôleur. L'intervalle de mesure est décomposé en N pas de mesure, la valeur retenue étant le pas le plus proche de la valeur mesurée



Très souvent, la période d'échantillonnage est très inférieure au temps de réponse du système (5 µs pour l'échantillonnage contre quelques millisecondes pour le processus), si bien qu'il est alors possible d'assimiler le comportement à celui d'un système continu.

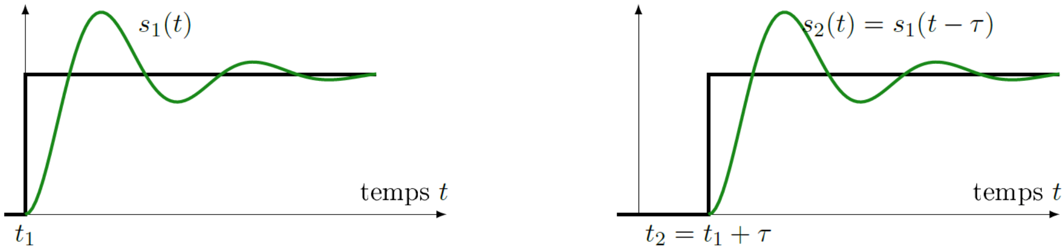
3. Système invariant

Système invariant

Az Définition

Un système invariant est un système dont le **comportement** est **indépendant du temps**.

Si une même entrée se produit à deux instants distincts (t_1 et $t_2 = t_1 + \tau$), alors les deux sorties temporelles ($s_1(t)$ et $s_2(t)$) seront identiques.



Invariance dans le temps

4. Modélisation par équation différentielle linéaire à coefficients constants

Pour les systèmes automatisés réels, on se ramène au cas des SLCI en faisant des **hypothèses simplificatrices**. La comparaison du modèle avec la réalité permettra de valider ou non les hypothèses proposées et d'affiner celui-ci si nécessaire.

Pour modéliser un SLCI, il est nécessaire de déterminer une équation reliant l'entrée $e(t)$ (ou les entrées) et la sortie $s(t)$. Dans tout ce qui suit, l'entrée e et la sortie s sont quelconques : elles peuvent être des tensions, des vitesses, des positions, des forces, etc... Elles ne sont pas non plus nécessairement de même dimension.

Fondamental

Sous les hypothèses de continuité, de linéarité et d'invariance dans le temps, la relation de comportement d'un système peut se mettre sous la forme d'une **équation différentielle linéaire à coefficients constants** :

$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \ldots + a_0 \ s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \ldots + b_0 \ e(t)$

Cette propriété sera à la base des développements ultérieurs.

Deux types de modélisation

Pour obtenir cette équation, deux types de modélisation sont envisageables :

- un **modèle de connaissance** établi à partir de lois physiques permet d'aboutir généralement à une telle équation. L'équation obtenue peut être plus ou moins complexe en fonction du système.
- à l'inverse, à partir d'un résultat expérimental sur une partie du système, il est possible de proposer un modèle simple dit **modèle de comportement** d'un constituant qui sera ensuite utilisé dans le modèle global du système. C'est un modèle dans lequel le sous-système est remplacé par une "boîte noire".

III La transformée de Laplace

1. Définition de la transformée de Laplace

L'idée générale est de changer de variable, et de faire correspondre à la fonction **temporelle** $f(t)$ une image de celle-ci, $F(p)$, uniquement valable dans le domaine **symbolique**.

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)

Az Définition

$F(p) = \mathcal{L}\ [f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-p\,t} \times f(t)\ dt$

On passe du **domaine temporel** (variable t) au **domaine symbolique** (variable p)

Notation anglo-saxonne Remarque

Dans les pays anglo-saxons, la variable symbolique est souvent notée s, pour *symbolic variable*. Les logiciels de simulation Scilab et Matlab utilisent cette notation.

Remarque

La transformée F(p) n'existe que si l'intégrale a un sens ; il faut donc que :

- $f(t)$ soit intégrable
- lorsque $t \to \infty$, $f(t)$ ne croisse pas plus vite qu'une exponentielle (afin de maintenir le caractère convergent de la fonction à intégrer)

Dans la pratique, on ne calcule que les transformées de Laplace de fonctions **causales,** c'est-à-dire telles que $f(t) = 0$ pour $t \leq 0$. Ces fonctions f représentent des grandeurs physiques : intensité, température, effort, vitesse, etc..

On écrit la transformée de Laplace inverse comme suit : $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\ [F(p)]$.

Point de vue complexe de la variable p Remarque

Si nécessaire (cf. analyse harmonique), on pourra considérer la variable symbolique p comme un nombre complexe (avec partie réelle et partie imaginaire) : $p = \alpha + j\,\beta$

Convention d'écriture Attention

Par habitude, une **lettre minuscule** sera utilisée pour noter le signal dans le **domaine temporel**, et la **lettre majuscule** pour noter la **transformée de Laplace de ce signal**. Cependant, si dans un énoncé, la grandeur temporelle est déjà en majuscule, on confondra les deux écritures ; il faudra donc bien veiller à préciser la variable associée au domaine d'étude :

- $C(t)$ pour le domaine temporel
- $C(p)$ pour le domaine symbolique

2. Propriétés de la transformée de Laplace

Conditions de Heaviside Fondamental

Une fonction du temps f(t) vérifie les **conditions de Heaviside** si elle vérifie : $f(0) = 0,\ \dot{f}(0) = 0,\ \ddot{f}(0) = 0$... c'est à dire si les **conditions initiales sont nulles** et le système au repos pour $t < 0$.

Oliver Heaviside (1850-1925)

Produit Attention

La transformée de Laplace d'un produit de fonctions **n'est pas** le produit des transformées ! Idem pour la transformée inverse.

2.1. Unicité

A $f(t)$ correspond $F(p)$ unique, et vice-versa.

2.2. Linéarité

Linéarité

$\mathcal{L}\ [f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}\ [f_1(t)] + \mathcal{L}\ [f_2(t)]$

$\mathcal{L}\ [\lambda f(t)] = \lambda\, \mathcal{L}\,[f(t)] = \lambda\, F(p)$

2.3. Facteur d'échelle

Complément

On cherche $\mathcal{L}\,(f(at)) = \int_0^\infty e^{-pt} f(at)dt$.

En posant $u = a\,t$ donc $du = a\ dt$ on a $\mathcal{L}\,(f(at)) = \int_0^\infty e^{-p\frac{u}{a}} f(u)\frac{du}{a}$

Az Définition

$\mathcal{L}\,(f(at)) = \frac{1}{a}\ F\left(\frac{p}{a}\right)$

2.4. Dérivation

Complément

On recherche $\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-p\,t} \times \frac{df(t)}{dt}\ dt$

On intègre par parties en posant $u = e^{-pt}$ donc $du = -p\ e^{-pt}$ et $v = f(t)$ donc $dv = \frac{df(t)}{dt}$.

D'où $\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = \left[e^{-pt} f(t)\right]_0^\infty - \int_0^\infty -p\ e^{-pt}\ f(t)\ dt$

Or $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-pt} f(t) = 0$ car $f(t)$ est bornée : on obtient alors la propriété ci-dessous.

Az Définition

Dérivée première : $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p\ F(p) - f(0^+)$

Dérivée seconde : $\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2\ F(p) - p\ f(0^+) - f'(0^+)$

Fondamental

Dans les conditions de Heaviside : $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p\ F(p)$ et $\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2\ F(p)$

Dériver par rapport à t dans le domaine temporel revient alors à **multiplier par p** dans le domaine symbolique.

2.5. Intégration

Complément

On recherche $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)\,du\right)$.

Soit $f(t) = \frac{d\,g(t)}{dt}$.

On a alors $\mathcal{L}\,(f(t)) = F(p) = \mathcal{L}\left(\frac{dg(t)}{dt}\right) = p\,G(p) - g(0^+) = p\,\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)\,du\right) - g(0^+)$.

Az Définition

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\,du\right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0^+)}{p}$$

Fondamental

Dans les conditions de Heaviside : $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\,du\right] = \frac{F(p)}{p}$

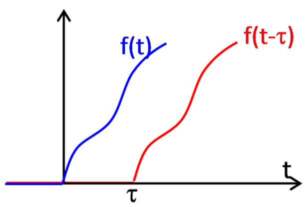
Intégrer dans le domaine temporel revient à **diviser par p** dans le domaine symbolique.

2.6. Théorèmes

Théorème du retard

Fondamental

$$\mathcal{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-\tau p}\,F(p)$$



Retard

Théorème de la valeur initiale

Fondamental

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to\infty} p\,F(p)$$

Théorème de la valeur finale

Fondamental

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} p\,F(p)$$

Attention

Ne pas oublier la multiplication par p dans le domaine symbolique !

3. Transformées de Laplace courantes

Distribution ("fonction") de Dirac

Fondamental

$$\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = 1$$

Échelon

Fondamental

$$\mathcal{L}\left[e_0\, u(t)\right] = \frac{e_0}{p}$$

Rampe

Fondamental

$$\mathcal{L}\left[a_0\, t\, u(t)\right] = \frac{a_0}{p^2}$$

Fonction exponentielle (avec a>0)

Fondamental

$$\mathcal{L}\left[e^{-a\,t}\, u(t)\right] = \frac{1}{p+a} \qquad \mathcal{L}\left[t \cdot e^{-a\,t}\, u(t)\right] = \frac{1}{(p+a)^2}$$

Fonctions sinus et cosinus

$$\mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\, u(t)\right] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}\left[\cos(\omega t)\, u(t)\right] = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

Fonctions sinus et cosinus avec exponentielle en facteur

$$\mathcal{L}\left[e^{-a\,t}\ \sin(\omega t)\, u(t)\right] = \frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}\left[e^{-a\,t}\ \cos(\omega t)\, u(t)\right] = \frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$$

Remarque

Même si les transformées de Laplace courantes peuvent être rappelées au candidat lors des concours, il est primordial de connaître les plus courantes présentées ici **par cœur**.

4. Exercice : Signaux composés : expression dans le domaine symbolique

Réécrire les expressions temporelles des signaux composés de l'exercice précédent dans le domaine symbolique, en utilisant les transformées de Laplace courantes et le théorème du retard.

5. Exercice : Passage d'une équation différentielle à une équation polynômiale

Réécrire les équations différentielles suivantes dans le domaine symbolique en utilisant les propriétés de dérivation de la transformée de Laplace, et **dans les conditions de Heaviside**.

Question 1

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = x(t)$$

Question 2

$$\frac{d^3s(t)}{dt^3} + 60\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 500\frac{ds(t)}{dt} = 10^4 e(t)$$

Question 3

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 3\frac{ds(t)}{dt} + 2s(t) = 7\frac{de(t)}{dt} + 11e(t)$$

IV Fonctions de transfert

1. Généralités

Soit un système décrit par l'équation différentielle :

$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \ldots + a_0\ s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \ldots + b_0\ e(t)$

On se place dans des conditions de Heaviside, alors $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^n\ F(p)$

Grâce à la transformée de Laplace, on obtient :

$a_n\ p^n\ S(p) + \ldots + a_0\ S(p) = b_m\ p^m\ E(p) + \ldots + b_0\ E(p).$

Fonction de transfert

Az Définition

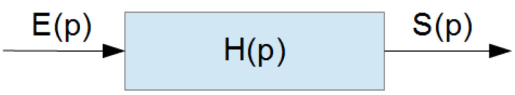
On appelle **fonction de transfert** la fonction :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m\ p^m + \ldots + b_0}{a_n\ p^n + \ldots + a_0}$$

Elle **représente le comportement intrinsèque du système** : son expression ne dépend pas du signal d'entrée.

Elle s'exprime simplement comme le **rapport de deux polynômes en** p (fraction rationnelle), construits à partir des coefficients de l'équation différentielle régissant son évolution.

Dans le domaine symbolique, la relation entre l'entrée et la sortie **est bien linéaire** : elle s'écrit $S(p) = H(p) \cdot E(p)$.



Forme canonique

Fondamental

Toute fonction de transfert peut être exprimée sous sa **forme canonique**. Celle-ci permet de comparer la fonction de transfert à d'autres, d'identifier des paramètres, etc..

$$H(p) = \frac{K\ (1 + \ldots + b_{m'} p^{m'})}{p^\alpha\ (1 + \ldots + a_{n'} p^{n'})}$$

avec :

- $n = n' + \alpha$: **ordre** du système
- α : **classe** du système
- K : **gain** statique

Zéros et pôles — Fondamental

En faisant apparaître les racines (complexes éventuellement) du dénominateur et du numérateur de la fonction de transfert, $H(p)$ peut s'écrire :

$$H(p) = \frac{K(p-z_1)(p-z_2)\dots(p-z_m)}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)}$$

- z_i sont les **zéros** de la fonction de transfert
- p_i sont les **pôles** de la fonction de transfert

L'étude des pôles et des zéros sera utile pour avoir une idée des performances du système (notamment la stabilité)

2. Exercice

Question

Utiliser les équations polynômiales précédentes pour obtenir les fonctions de transfert $\frac{Y(p)}{X(p)}$ ou $\frac{S(p)}{E(p)}$. Les mettre sous forme canonique, puis en donner l'ordre, la classe et le gain.

V Schémas-blocs

Introduction

Chaque composant d'un système asservi peut être modélisé par une fonction de transfert particulière.

L'association de toutes ces fonctions de transfert en une seule, globale, permet de modéliser et d'étudier le système complet de façon plus simple.

En revanche, on s'éloigne de la réalité structurelle du système.

L'obtention de la fonction de transfert globale d'un système peut se faire soit analytiquement, soit graphiquement grâce aux **schémas-blocs**.

1. Éléments d'un schéma bloc

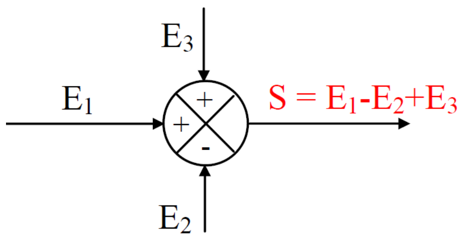
Bloc

Chaque bloc du schéma bloc représente une fonction de transfert ; il comporte systématiquement une flèche entrante et une flèche sortante.

Sommateur

Un sommateur comporte deux à trois entrées et toujours une seule sortie. Il permet de sommer ou retrancher plusieurs grandeurs physiques.

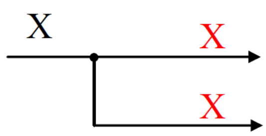
Chaque entrée est affectée du signe positif ou négatif. Toutes les branches représentent des grandeurs homogènes.



Sommateur

Jonction

Une jonction est un prélèvement qui a le même signal que la branche principale.

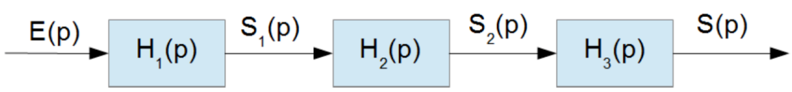


Jonction

2. Transformation et réduction des schémas-blocs

2.1. Combinaison de fonctions de transfert

Fonctions de transfert en série — Fondamental

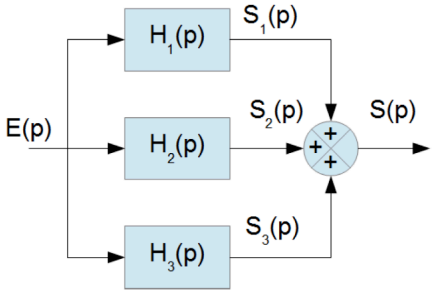


La sortie d'un bloc est l'entrée du bloc suivant.

On a alors $H(p)$, fonction de transfert globale : $H(p) = H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p)$.

Fonctions de transfert en parallèle

Fondamental



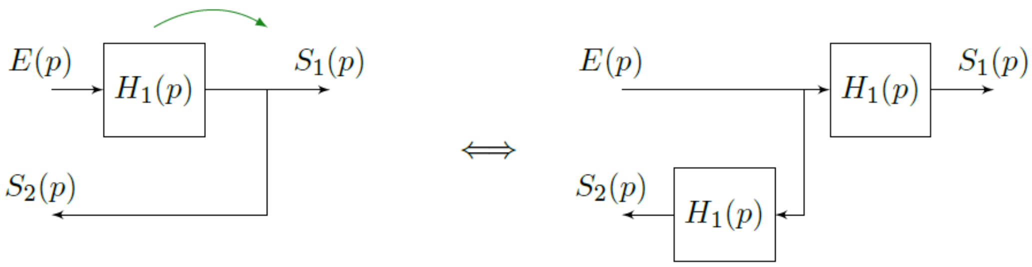
$S(p) = S_1(p) + S_2(p) + S_3(p)$ et $S_i(p) = H_i(p) \cdot E(p)$

$H(p) = H_1(p) + H_2(p) + H_3(p)$.

2.2. Déplacements

Déplacement d'un bloc de part et d'autre d'une jonction

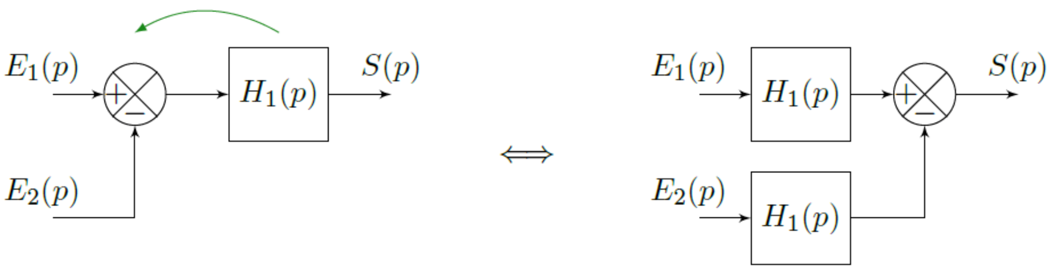
Déplacement d'un bloc vers l'amont d'une jonction



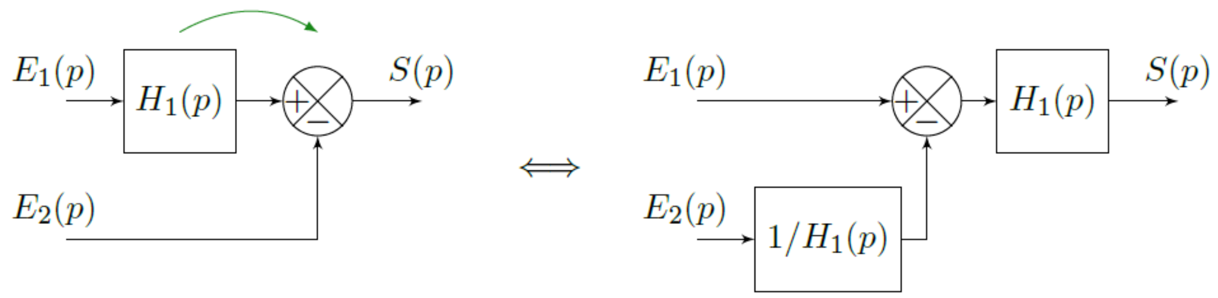
Déplacement d'un bloc vers l'aval d'une jonction

Déplacement d'un bloc de part et d'autre d'un sommateur

Complément



Déplacement d'un bloc vers l'amont d'un sommateur



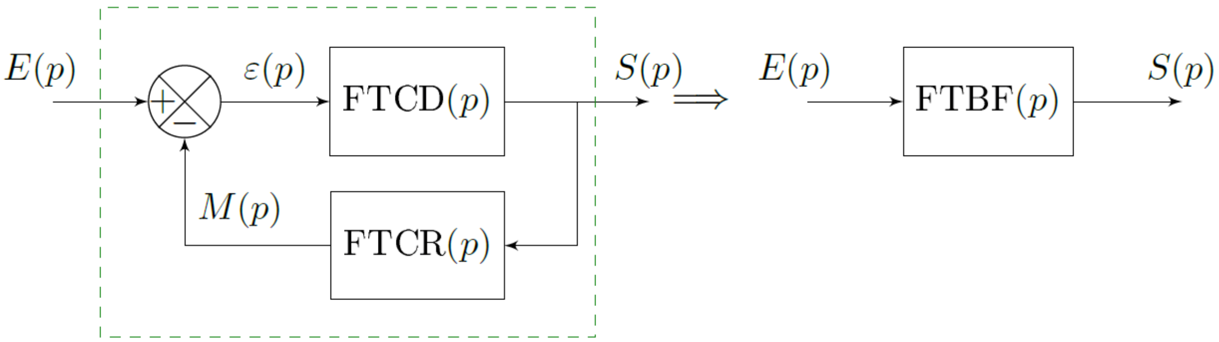
Déplacement d'un bloc vers l'aval d'un sommateur

3. Fonction de transfert en boucle fermée

Les systèmes asservis étudiés sont généralement représentables par un schéma-blocs **avec rétroaction**. Pour étudier les performances de ces systèmes, il est nécessaire de déterminer la fonction de transfert globale, appelée **fonction de transfert en boucle fermée**.

Fonction de transfert en boucle fermée

Az Définition



Système asservi en boucle fermée

$S = FTCD.\epsilon$ et $\epsilon = E - FTCR.S$, d'où $S = FTCD.(E - FTCR.S)$ ou $S.(1 + FTCD.FTCR) = FTCD.E$

Cela donne la formule de Black :

$$FTBF = \frac{FTCD}{1 + FTCD.FTCR}$$

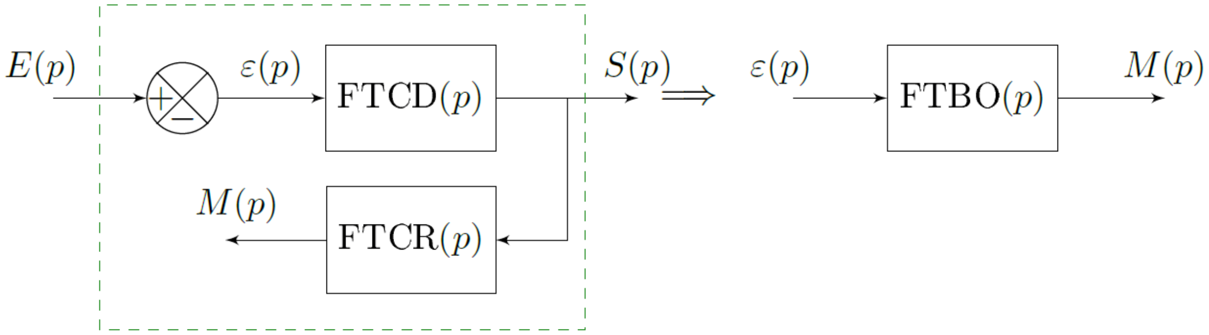
4. Fonction de transfert en boucle ouverte

⚠ Attention

Dans l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte, on considère comme signal de sortie du système le signal M ; c'est l'image par la chaîne de retour du signal S.

Fonction de transfert en boucle ouverte

Az Définition



système asservi en boucle ouverte

$M = FTCD.FTCR.\epsilon$ et $\epsilon = E$ d'où $M = FTCD.FTCR.E = FTBO\ .\ E.$

Ce qui donne :

$$FTBO = FTCD.FTCR$$

5. Remarques

Lien entre FTBF et FTBO

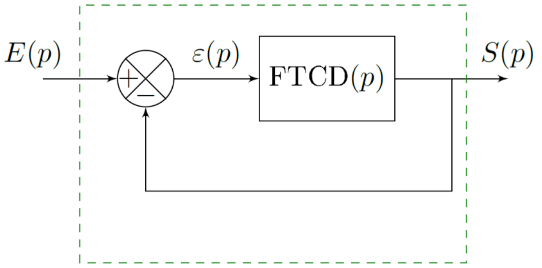
Remarque

Par définition de la fonction de transfert en boucle ouverte, on peut aussi écrire : $FTBF = \frac{FTCD}{1+FTBO}$.

FTBF pour un système asservi à retour unitaire

Remarque

Par manipulation du schéma-bloc, on peut toujours retrouver une forme **à retour unitaire** ($FTCR(p) = 1$). Dans ce cas, la fonction de transfert de la chaîne directe et la $FTBO$ sont identiques.

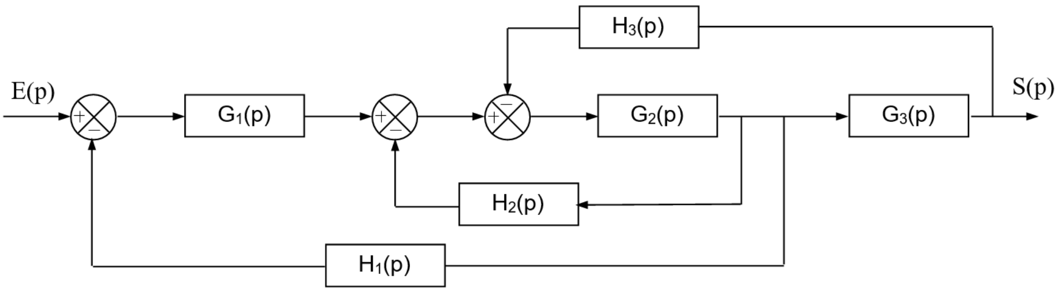


Système asservi en boucle fermée à retour unitaire

Par conséquent : $FTBF = \frac{FTBO}{1+FTBO}$

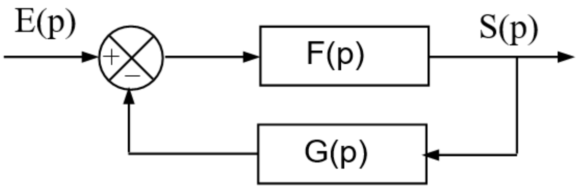
6. Exercice

Soit le schéma blocs suivant :



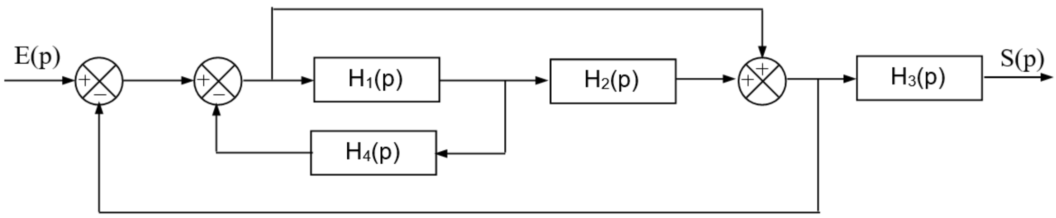
Question 1

Réduire le schéma blocs sous la forme suivante :



Donner les expressions de $F(p)$ et $G(p)$.

Soit le schéma blocs suivant :



Question 2

Déterminer la fonction de transfert $\frac{S(p)}{E(p)}$.

VI Les diagrammes de Bode

Introduction

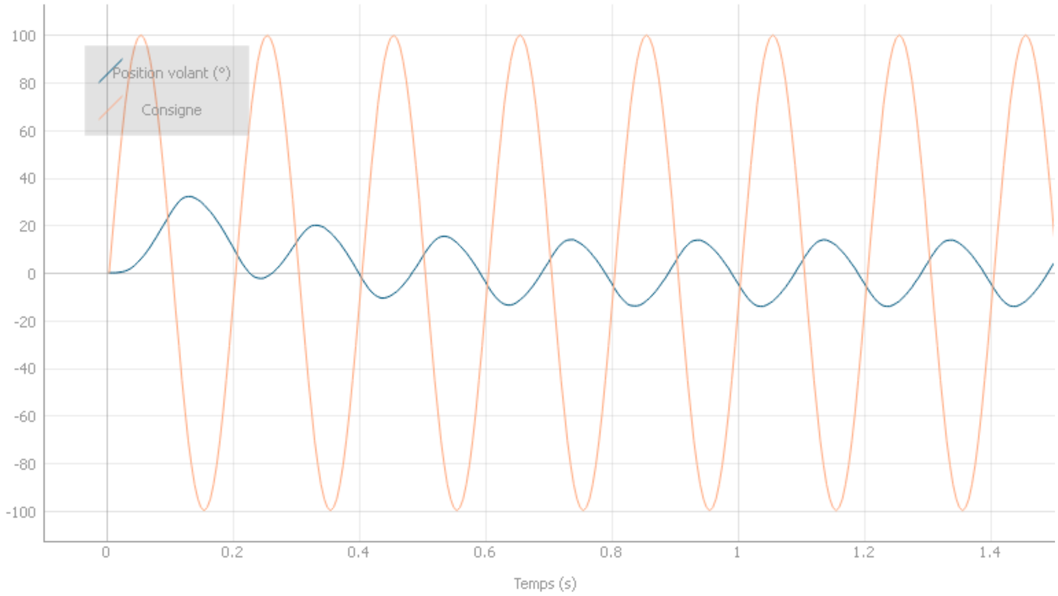
Le diagramme de Bode est un outil utilisé en analyse fréquentielle, notamment essentielle en électronique car elle permet de définir la bande passante, la fréquence de coupure, etc.

Les systèmes que nous étudions sont constitués de processus mécaniques dont les fréquences de coupure sont faibles (ce qui limite l'intérêt de l'analyse fréquentielle détaillée). Mais l'analyse fréquentielle est très intéressante pour l'étude du problème de la **stabilité** des systèmes asservis et pour l'**identification fréquentielle** des systèmes.

1. Principe de l'analyse harmonique (ou fréquentielle)

Définitions

Un système soumis à une entrée sinusoïdale va fournir une sortie elle-même sinusoïdale (après disparition du régime transitoire).



Position angulaire du volant à retour de force

Réponse harmonique (ou fréquentielle) — Az Définition

La **réponse harmonique** (ou fréquentielle) d'un système est sa réponse **en régime permanent**, lorsqu'il est soumis à une entrée sinusoïdale dont on fait varier la pulsation.

Le signal d'entrée s'écrit $e(t) = e_0\ \sin(\omega\, t)$ et celui de la sortie $s(t) = s_0\ \sin(\omega\, t + \varphi)$, avec :

- e_0 et s_0 : amplitudes respectives de l'entrée et de la sortie.
- ω : pulsation (commune à l'entrée et à la sortie) en rad/s.
- φ : déphasage (de la sortie par rapport à l'entrée), en rad.

Gain et phase

Remarque

Pour connaître précisément la réponse relative à l'entrée (elle-même connue), il suffit d'avoir :

- le rapport des amplitudes $\frac{s_0}{e_0}$, ou **gain G** du système
- le déphasage φ, ou **phase**

Fréquence et période

Remarque

Que ce soit pour l'entrée ou la sortie :

- la fréquence sera égale à f, telle que $\omega = 2\,\pi\,f$
- la période sera égale à T, telle que $T = \frac{2\,\pi}{\omega}$

Utilisation de la fonction de transfert du système

Fondamental

L'équation différentielle décrivant le système n'est pas facile à utiliser ; on se sert à nouveau en SII de la fonction de transfert $H(p)$. On remplace la variable symbolique p par $j\omega$ dans l'expression de la fonction de transfert.

On peut établir alors un lien entre le gain ou la phase, et le nombre complexe qu'est devenue $H(j\omega)$.

- le gain $\frac{s_0}{e_0} = |H(j\omega)|$, c'est-à-dire le **module** de la fonction de transfert
- la phase $\varphi = \arg(H(j\omega))$, c'est-à-dire l'**argument** de la fonction de transfert

Propriétés du module et de l'argument d'un complexe

Rappel

Si $H(j\omega) = A + j\,B$, alors :

1. $|H(j\omega)| = \sqrt{A^2 + B^2}$
2. $\arg(H(j\omega)) = \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$ si $A > 0$
3. $\arg(H(j\omega)) = \left(\arctan\left(\frac{B}{A}\right) + \pi\right)$ si $A < 0$

2. Représentation graphique de la fonction de transfert

Introduction

Pour un système soumis à une entrée sinusoïdale, on peut tracer la représentation graphique de sa fonction de transfert $H(p)$ pour $p = j\omega$, c'est-à-dire : $H(j\omega)$. Cela permet :

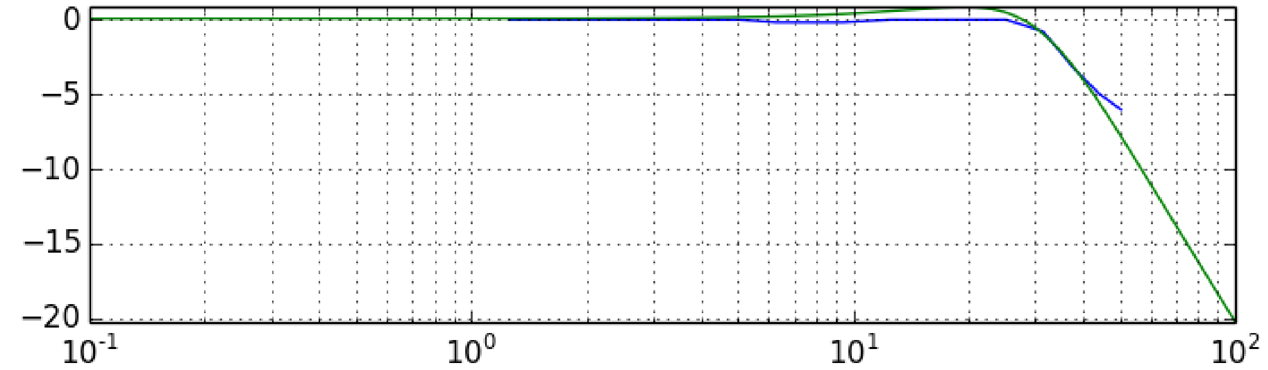
- de déduire les propriétés et les performances du système étudié,
- dans certains cas, "d'identifier" le système, c'est-à-dire évaluer la forme et les paramètres de sa fonction de transfert.

2.1. Principe du diagramme de Bode

La fonction de transfert $H(j\omega)$ est représentée en **deux courbes**, alignées en fonction de la pulsation ω.

Courbe de gain

- **pulsation** : axe des abscisses gradué en $\log \omega$
- **gain** G_{dB} : axe des ordonnées gradué en **décibels** : $G_{dB} = 20 \log |H(j\omega)|$

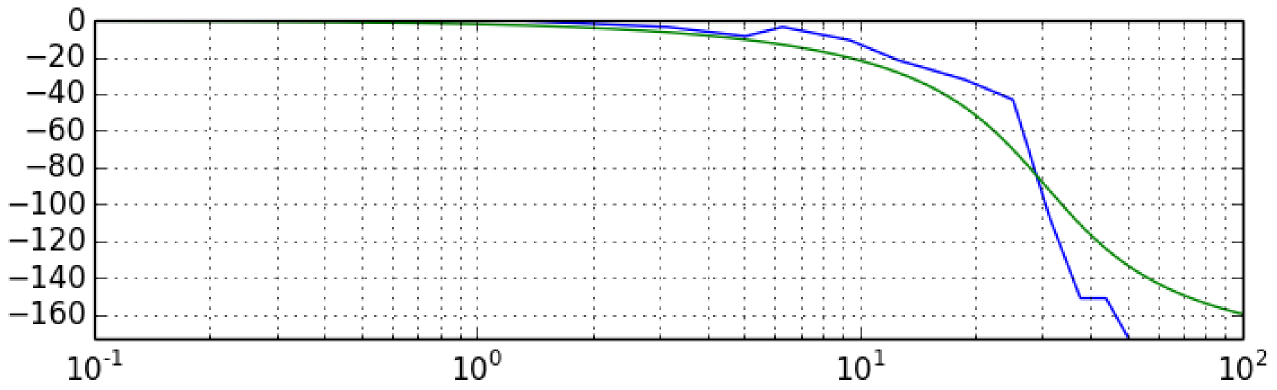


Courbe de gain du volant à retour de force

Courbe de phase

pulsation : axe des abscisses gradué en $\log \omega$

phase : axe des ordonnées gradué en **degrés ou en radians**

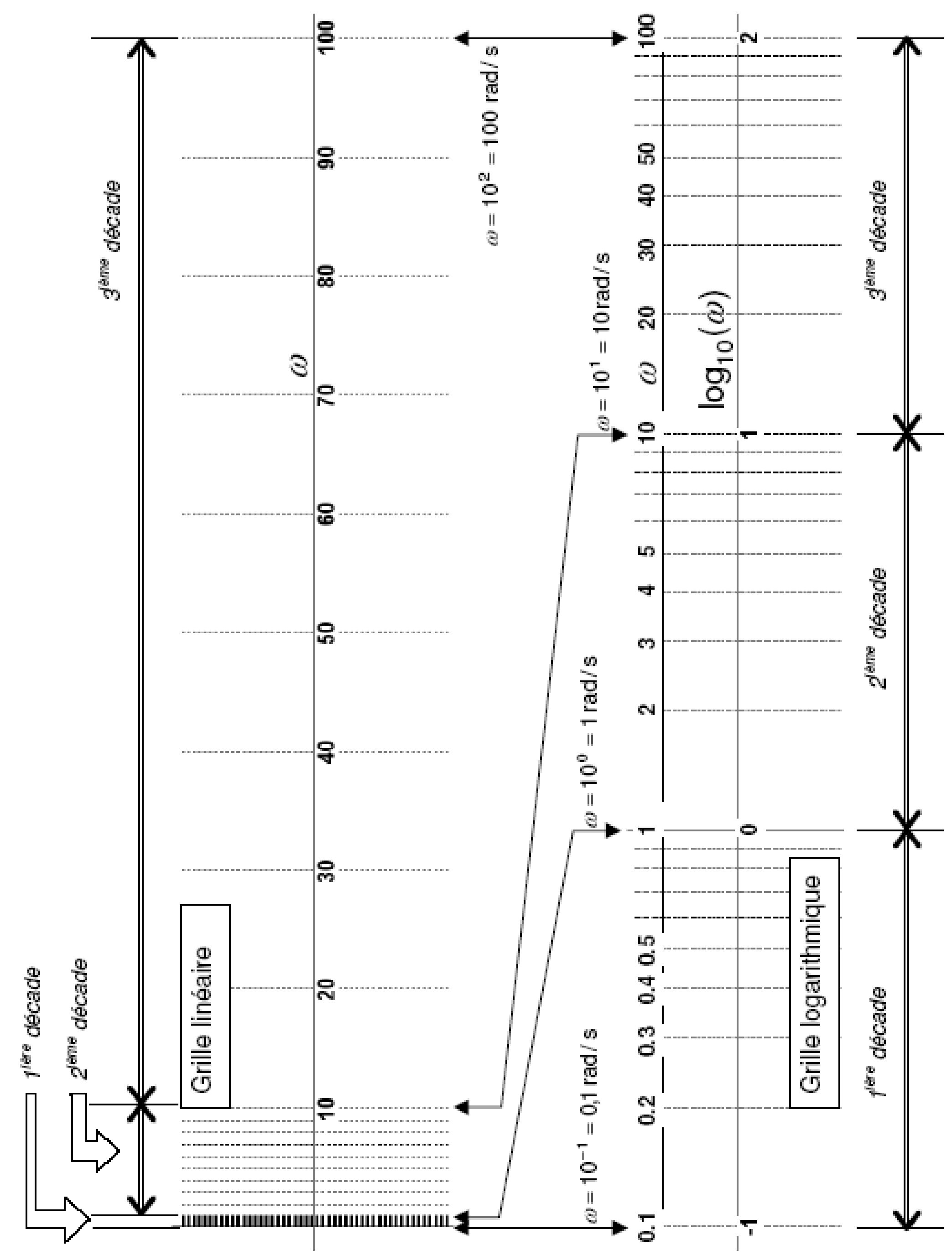


Courbe de phase du volant à retour de force

2.2. Echelle logarithmique

⚠ Attention

Le diagramme de Bode utilise **en abscisse une échelle logarithmique** pour les pulsations. Ceci permet de faire apparaître un comportement du système pour des plages de pulsations (ou fréquences) distinctes : de 1 à 10 rad/s, puis de 10 à 100 rad/s, puis de 100 à 1000 rad/s, etc..



Comparaison entre échelle linéaire et échelle logarithmique

Il n'y a pas d'origine des abscisses sur cette échelle logarithmique : le diagramme de Bode sera tracé sur une bande de pulsation qu'il faudra choisir judicieusement.

Décade et octave

Az Définition

- Une **décade** correspond à la **multiplication** (ou division) par **10** de la pulsation ω, soit une addition (ou une soustraction) de 1 pour $\log \omega$.
- Une **octave** correspond à la **multiplication** (ou division) par **2** (comme en musique !) de la pulsation ω, soit une addition (ou une soustraction) de $\log 2 \simeq 0.3$ pour $\log \omega$.

2.3. Particularités

Remarque

Sur la plupart des mécanismes :

- la réponse est en retard par rapport à l'entrée, donc la phase est négative : $(\varphi < 0)$
- l'amplitude de sortie tend vers 0 aux hautes fréquences ($\lim\limits_{\omega \to \infty} G = 0$), donc le gain en débibels G_{dB} tend vers $-\infty$.

Modification du gain statique de la fonction de transfert

Attention

La modification du gain statique K de la fonction de transfert provoque une translation verticale de la courbe de gain, et n'a aucune influence sur la courbe de phase.

Bande passante

Az Définition

La **bande passante** d'un système peut se définir comme sa faculté à transmettre **sans atténuation notable** les signaux sinusoïdaux qui le traversent.

La **bande passante à -3 dB** est définie comme la plage de pulsations allant de 0 rad/s, à celle où le gain perd 3 dB par rapport à sa valeur initiale.

(cela correspond à une atténuation de la sortie de 30% environ : $10^{\frac{-3}{20}} = 0.708$).

Hendrik Wade Bode

Complément

Bode (1905 - 1982)

Ingénieur, chercheur et inventeur américain d'origine néerlandaise.

Il débute sa carrière chez les laboratoires Bell, et travaille sur les réseaux de télécommunications. A la fin des années 1930, il développe les diagrammes portant son nom afin de faciliter l'étude de la stabilité des systèmes à rétroaction. Pendant et après la seconde guerre mondiale, Bode oriente ses recherches dans le domaine militaire, notamment sur le suivi de cible aérienne à l'aide d'un radar.

2.4. Technique générale de tracé

Addition des gains et des phases

Soit $H = H_1 \cdot H_2$ (fonctions de transfert en série):

- $G_{dB} = G_{dB1} + G_{dB2}$, car $20 \log |H| = 20 \log |H_1| + 20 \log |H_2|$
- $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, car $\arg H = \arg H_1 + \arg H_2$

Fondamental

Ainsi, lorsque des fonctions de transfert sont en **série** (donc **multipliées** les unes avec les autres) :

- le **gain total** est égal à la **somme** de chaque gain (grâce aux propriétés du décibel)
- la **phase totale** est égale à la **somme** de chaque phase (grâce aux propriétés de l'argument d'un complexe)

Conseil

On peut donc tracer le diagramme de Bode de n'importe quel système, en connaissant celui de toutes les fonctions de transfert élémentaires suivantes :

- le proportionnel pur K
- l'intégrateur $\frac{K}{p}$ (et parfois son inverse, le dérivateur Kp)
- le premier ordre $\frac{1}{1+\tau p}$ et son inverse
- le second ordre $\frac{1}{1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$ et son inverse

Construction d'un diagramme de Bode pour les systèmes d'ordre quelconque

Méthode

Première étape : écrire la fonction de transfert globale comme le **produit** de fonctions fondamentales.

$$H(j\omega)=\frac{K}{(j\omega)^\alpha}\cdot\frac{\prod_m(1+\tau_m.j\omega)}{\prod_n(1+\tau_n.j\omega)}\cdot\frac{\prod_k\left(1+\frac{2m_k}{\omega_{0k}}j\omega+\frac{1}{\omega_{0k}^2}(j\omega)^2\right)}{\prod_r\left(1+\frac{2m_r}{\omega_{0r}}j\omega+\frac{1}{\omega_{0r}^2}(j\omega)^2\right)}$$

avec les :

- α intégrateurs
- m inverses de premier ordre
- n premier ordres
- k inverses de second ordre
- r second ordres

Deuxième étape : classer les pulsations de cassures ($\frac{1}{\tau}$ pour un premier ordre, ω_0 pour un second ordre) dans un ordre croissant. Les "cassures" du tracé asymptotique correspondront à ces pulsations.

Troisième étape :

1. tracer le diagramme de $\frac{K}{(j\omega)^\alpha}$
2. en avançant vers les pulsations croissantes, faire intervenir les autres systèmes fondamentaux selon l'ordre précédent.

Quatrième étape éventuelle : affiner le tracé asymptotique en combinant les courbes réelles.

2.5. Complément sur la réponse harmonique d'un système

L'objectif est de prouver que :

- la réponse (en régime permanent) d'un système soumis à une entrée sinusoïdale est elle-même une sortie sinusoïdale
- la fonction de transfert peut être utilisée en remplaçant la variable symbolique p par $j\omega$.

a) Etude

Soit un système modélisé par sa fonction de transfert $H(p)$, avec $E(p)$ et $S(p)$ respectivement les transformées de Laplace de l'entrée $e(t)$ et de la sortie $s(t)$.

En mettant en évidence les pôles de la fonction de transfert pour une décomposition en éléments simples, on peut écrire $H(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)} = \dfrac{N(p)}{(p-p_1)(p-p_2)\ldots\ (p-p_n)}$.

> ⚠ Attention
>
> On considère dans cette démonstration que tous ces pôles sont réels (et négatifs).

L'entrée étant sinusoïdale, $e(t) = e_0\ \sin \omega t$, on a $E(p) = e_0 \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

Ainsi $S(p) = H(p).\, E(p) = H(p).\, e_0 \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

b) Décomposition en éléments simples

Comme tous les pôles de la fonction de transfert sont considérés réels, l'expression de $S(p)$ a pour racines :

- des réels (négatifs) $p_1, p_2, \ldots, p_n$
- un complexe $j\omega$ et son conjugué $-j\omega$.

On peut alors écrire $S(p) = \dfrac{A}{p-j\omega} + \dfrac{\bar{A}}{p+j\omega} + \dfrac{B_1}{p-p_1} + \dfrac{B_2}{p-p_2} + \ldots + \dfrac{B_n}{p-p_n}$ où :

- A et un complexe et $\bar{A}$ son conjugué
- les B_i sont des constantes réelles

Transformée de Laplace inverse

Dans le domaine temporel, cela donne

$s(t) = Ae^{j\omega t} + \bar{A}e^{-j\omega t} + B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t} + \ldots + B_n e^{p_n t}$

c) Restriction au régime permanent

Puisque l'on veut observer le régime permanent uniquement de la réponse, on suppose que le régime transitoire disparaît. Cela correspond à la disparition des termes $B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t} + \ldots + B_n e^{p_n t}$, qui tendent vers 0 lorsque t tend vers ∞ (les pôles p_i sont négatifs).

En régime permanent la réponse peut donc s'écrire $s(t) = Ae^{j\omega t} + \bar{A}e^{-j\omega t}$

d) Obtention du complexe A et de son conjugué

$$\lim_{p \to j\omega} (p - j\omega)\ S(p) = \lim_{p \to j\omega} (p - j\omega) H(p)\ e_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \lim_{p \to j\omega} \frac{e_0\ H(p)\ \omega}{p + j\omega} = \frac{e_0\ H(j\omega)}{2j} = A$$

$$\lim_{p \to -j\omega} (p + j\omega)\ S(p) = \lim_{p \to -j\omega} (p + j\omega) H(p)\ e_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \lim_{p \to -j\omega} \frac{e_0\ H(p)\ \omega}{p - j\omega} = \frac{e_0\ H(-j\omega)}{-2j} = \bar{A}$$

e) Ecriture complexe de la fonction de transfert

Puisque $H(j\omega)$ est un nombre complexe, on peut écrire $H(j\omega) = |H(j\omega)|\ e^{j\varphi}$ et $H(-j\omega) = |H(j\omega)|\ e^{-j\varphi}$

La sortie du système peut donc être écrite de la manière suivante :

$$s(t) = \frac{e_0\ |H(j\omega)|\ e^{j\varphi}}{2j}\ e^{j\omega\, t} - \frac{e_0\ |H(j\omega)|\ e^{-j\varphi}}{2j}\ e^{-j\omega\, t}$$

$$s(t) = e_0\ |H(j\omega)|\ \left(\frac{e^{j(\omega_t + \varphi)} - e^{-j(\omega\, t + \varphi)}}{2j} \right)$$

Formules d'Euler — Rappel

$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$

Fondamental

$$s(t) = e_0\ |H(j\omega)|\ \sin(\omega\, t + \varphi)$$

La sortie est donc bien une sinusoïde :

- de pulsation ω égale à celle de l'entrée
- d'amplitude $s_0 = e_0\ .\ |H(j\omega)|$
- déphasée de φ, argument de $H(j\omega)$