Modéliser les SLCI : systèmes fondamentaux

Table des matières

I Système proportionnel

1. Caractéristiques

La grande majorité des systèmes peuvent être modélisés par une constante, c'est à dire une relation de proportionnalité directe entre l'entrée et la sortie :

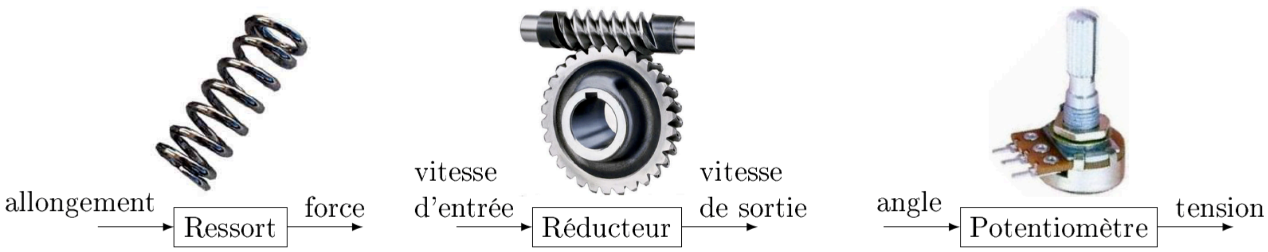
$$s(t) = K\, e(t)$$

La constante de proportionnalité est alors appelée le **gain** du système.

> Remarque
>
> Dans ce type de système, l'entrée et la sortie peuvent être inversées : il n'y a pas de notion de causalité.

On peut ainsi modéliser par une constante les composants suivants :

- ceux qui transmettent l'énergie sans changer sa nature : les transmetteurs (réducteur à roue et vis sans fin, à engrenages, système vis-écrou...),
- ceux qui distribuent l'énergie : préactionneurs (variateur),
- les capteurs (potentiomètre, génératrice tachymétrique)...



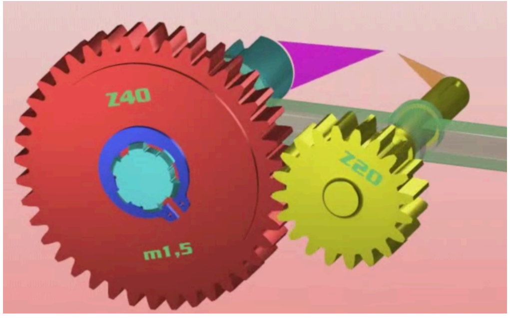
Exemples de systèmes modélisables par un gain pur

> **Gain d'un ressort**
>
> Exemple
>
> La relation reliant la force exercée sur le ressort $F(t)$ (sortie) à l'allongement $\Delta x(t)$ (entrée) est donnée par la relation : $F = k\,\Delta x$ où k est la **raideur** du ressort. Le **gain K** du système est alors égal à k.

Gain d'un réducteur de vitesse à engrenages

Exemple

On cherche à déterminer le rapport entre les vitesses angulaires (en tour/mn ou rad/s) des roues dentées ou la relation $\omega_2(t) = K\ \omega_1(t)$.



La petite roue possède Z_1 dents (20 dents) et la grande roue en possède Z_2 (40 dents).

On observe que la petite roue tourne plus vite que la grande roue. Ainsi lorsque la petite roue tourne d'un tour, elle pousse Z_1 dents de la grande roue qui ne tourne alors que de Z_1/Z_2 tour.

Le rapport de transmission entre les rotations est donc de Z_1/Z_2.

On a alors (au signe près) pour les vitesses de rotation : $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{Z_1}{Z_2}$

Le **gain K** du système est alors égal à Z_1/Z_2.

En Travaux Pratiques : cordeuse de raquettes

Exemple

Courbe caractéristique du réducteur de la cordeuse de raquettes

Homogénéité

Remarque

Le gain statique K est homogène au rapport de $s(t)$ sur $e(t)$.

2. Fonction de transfert

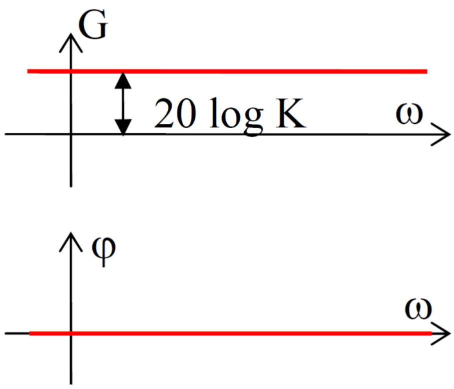
$s(t) = K \cdot e(t)$, donc $S(p) = K \cdot E(p)$.

Fondamental

$$H(p) = K$$

3. Diagramme de Bode

$H(j\omega) = K$



Bode : système à action proportionnelle

II Système intégrateur

1. Caractéristiques

Fondamental

Une relation fondamentale lors de la modélisation des systèmes mécaniques est la relation permettant de passer de la vitesse $v(t)$ à la position $x(t)$ (ou de l'accélération $a(t)$ à la vitesse $v(t)$) :

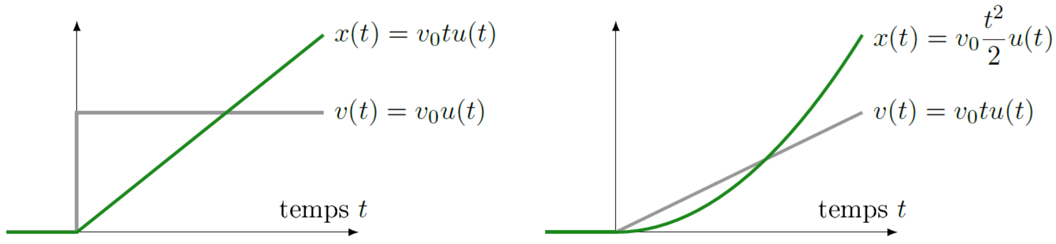
$$v(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = \dot{x}(t)$$

Ainsi la position $x(t)$ est donnée par la relation : $x(t) = \int_0^t v(t)\,dt$.

La relation entre l'entrée et la sortie peut donc s'écrire ainsi :

$$\frac{d\,s(t)}{dt} = K\,e(t)$$

Réponse temporelle à une entrée en échelon, et en rampe.



Réponse temporelle de la position pour une entrée en vitesse donnée

En supposant que les conditions initiales sont nulles :

- quand la vitesse est constante, la position est une droite
- quand la vitesse est une droite, la position est une parabole.

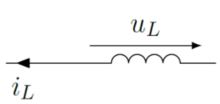
On notera que pour $t \leq 0$, la position est nulle.

D'autres systèmes sont modélisables par un intégrateur :

Domaine électrique

Exemple

Relation entre le courant et la tension dans une bobine : $u_L(t) = L\,\frac{d\,i(t)}{dt}$ (avec L l'**inductance** de la bobine)



Domaine thermique Exemple

relation entre la température et la puissance fournie par un radiateur dans une pièce sans perte : $C\,\frac{d\,T(t)}{dt} = P_{recue}(t)$ (avec C la **capacité thermique** de la pièce, $P_{recue}(t) = \frac{U(t)^2}{R}$ où U est la tension d'alimentation du radiateur et R la résistance du radiateur)

Remarque

Même si on parle de relation intégrale, on utilise souvent la forme dérivée entre les paramètres afin de faire apparaître des équations différentielles.

Homogénéité Attention

Le gain statique K est ici homogène au rapport de $\frac{ds(t)}{dt}$ sur $e(t)$.

2. Fonction de transfert

$\frac{d\,s(t)}{dt} = K \cdot e(t)$, donc $S(p) = \frac{K}{p} \cdot E(p)$.

Fondamental

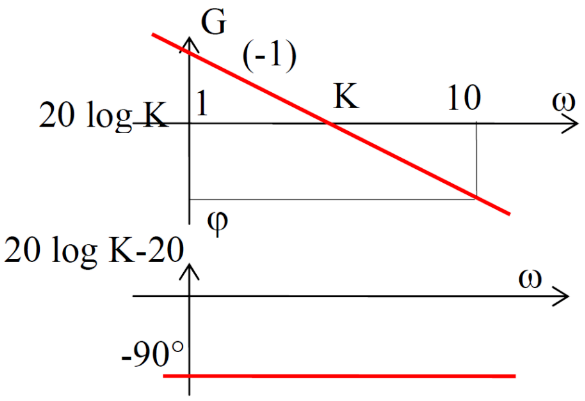
$$H(p) = \frac{K}{p}$$

3. Diagramme de Bode

$H(j\omega) = \frac{K}{j\omega} = -j\frac{K}{\omega}$ (donc imaginaire négatif)

Gain : $G = 20 \log K - 20 \log \omega$

Phase : $\varphi = -90^{\circ}$



Bode : intégrateur pur

Pente du gain

Remarque

La pente de la courbe de gain est ici de -20 dB par décade, dite "pente -1".

dB par décade	dB par octave	Nom usuel
-20	-6	"-1"
-40	-12	"-2"
-60	-18	"-3"

Équivalences des pentes du gain

III Système dérivateur pur

Az Définition

$$H(p) = K\,p$$

1. Analyse temporelle

⚠ Attention

Dans un système réel, l'ordre de dérivation de la sortie est **nécessairement** supérieur ou égal à celui de l'entrée.

Par conséquent, le degré du polynôme au dénominateur d'une fonction de transfert modélisant un système réel est forcément supérieur ou égal à celui du numérateur.

Un système dérivateur pur ne peut donc pas représenter un système réel.

Il n'y a donc pas lieu ici d'étudier les allures des réponses temporelles d'un système dérivateur pur.

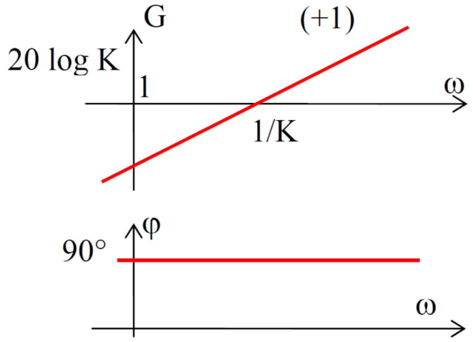
2. Diagramme de Bode

Remarque

Même si aucun système réel ne peut être modélisé par un dérivateur pur, il est nécessaire de connaître la réponse harmonique théorique d'un tel système.

En effet, en le superposant avec d'autres systèmes fondamentaux (par exemple Proportionnel et Intégrateur), on pourra représenter facilement la réponse harmonique d'un composant ou d'un correcteur.

$H(j\omega) = j\,K\,\omega$ (imaginaire positif), donc $G = 20\log K + 20\log\omega$ et $\varphi = 90^\circ$



Bode : dérivateur pur

IV Retard

Az Définition

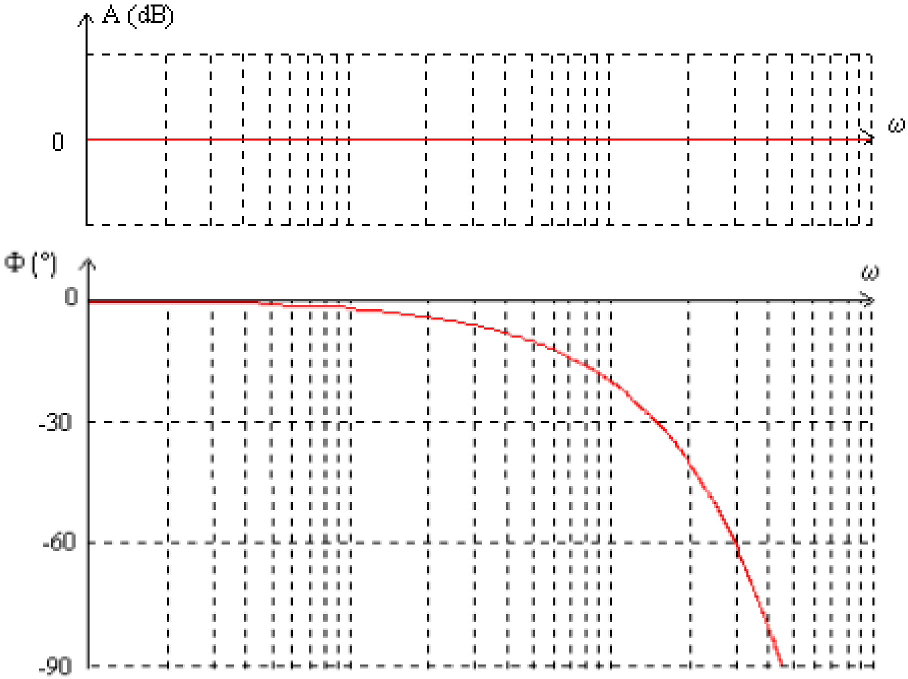
$$H(p) = e^{-\tau p}$$

1. Analyse temporelle

$S(p) = e^{-\tau p} E(p)$ donc $s(t) = e(t - \tau)$: la sortie est identique à l'entrée mais en retard d'une durée τ.

2. Diagramme de Bode

$H(j\omega) = e^{-j\,\tau\,\omega}$ donc $G = 20 \log 1 = 0$ et $\varphi = -\omega\,\tau$



Bode : retard pur

V Système de premier ordre

1. Caractéristiques et réponse temporelle

1.1. Forme de l'équation différentielle

Forme de l'équation différentielle Az Définition

La forme générale de l'équation différentielle caractéristique d'un système du premier ordre est :

$$\tau \frac{d\,s(t)}{dt} + s(t) = K\,e(t)$$

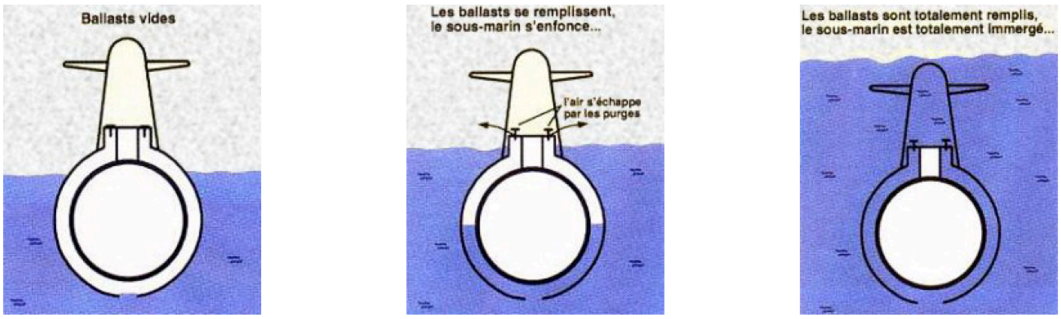
avec :

- τ la **constante de temps** du système (en secondes)
- K le **gain statique** du système (unité [s]/[e])

$\tau \frac{d\,s(t)}{dt}$ est bien homogène à $s(t)$ car τ en seconde "compense" la division par dt.

Sous-marin Exemple

Pour s'immerger ou remonter à la surface, les sous-marins utilisent des ballasts qui peuvent être plus ou moins remplis d'eau ou d'air. La poussée d'Archimède est alors modifiée et permet de ne plus s'opposer au poids du sous-marin et ainsi de gérer le déplacement vertical du sous-marin.



Principe d'immersion d'un sous-marin à ballast

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au sous-marin soumis à la poussée d'Archimède, à la pesanteur et aux frottements visqueux de l'eau, s'écrit :

$$m \frac{d\,v(t)}{dt} = -f\,v(t) + P\,a(t) - m\,g$$

On pose $P(t) = Pa(t) - mg$ la force permettant de gérer la vitesse verticale du sous-marin. On obtient alors une équation différentielle du premier ordre entre l'entrée $P(t)$ et la sortie $v(t)$:

$$\frac{m}{f} \frac{d\,v(t)}{dt} + v(t) = \frac{P(t)}{f}$$

Nous pouvons ainsi définir la constante de temps du système $\tau = \frac{m}{f}$ et le gain $K = \frac{1}{f}$.

Chauffage d'une pièce

Exemple

Le comportement d'une pièce chauffée dont les murs sont mal isolés peut être décrit par les équations suivantes :

- équation de la chaleur du système pièce : $C\,\frac{dT(t)}{dt} = P_{recue}(t) - P_{perdue}(t)$
- puissance fournie par le radiateur : $P_{recue}(t) = \frac{U^2(t)}{R}$
- pertes de puissance à travers les murs : $P_{perdue}(t) = h\,(T(t) - T_{ext}(t))$

En combinant ces équations pour ne faire apparaître que la température de la pièce T et les grandeurs externes au système (température extérieure T_{ext} et puissance reçue dépendant de la tension de commande des radiateurs $U(t)$), on obtient la relation :

$$C\,\frac{dT(t)}{dt} = P_{recue}(t) - h\,(T(t) - T_{ext}(t))$$

soit

$$C\,\frac{dT(t)}{dt} + h\,T(t) = P_{recue}(t) + h\,T_{ext}(t)$$

Ainsi on trouve également une équation différentielle du premier ordre, de constante de temps $\tau = \frac{C}{h}$. Sachant qu'il y a deux entrées et que l'équation est linéaire, on étudiera par **superposition** la réponse à l'entrée $U(t)$ d'une part puis à l'entrée $T_{ext}(t)$ d'autre part.

Remarque

La résolution de l'équation différentielle est habituellement obtenue (cf. mathématiques) en sommant :

- une solution particulière $s_p(t)$ qui caractérise le comportement du système pendant le régime permanent ou établi et qui est de la même forme que l'entrée du système
- une solution de l'équation différentielle sans second membre (équation homogène) $s_g(t)$ qui correspond au comportement du système pendant le régime transitoire.

En Sciences Industrielles pour l'Ingénieur, nous utiliserons la transformée de Laplace pour obtenir **si nécessaire** l'expression de la sortie du système $s(t)$.

1.2. Réponse impulsionnelle (i.e. à un Dirac)

Réponse impulsionnelle

Az Définition

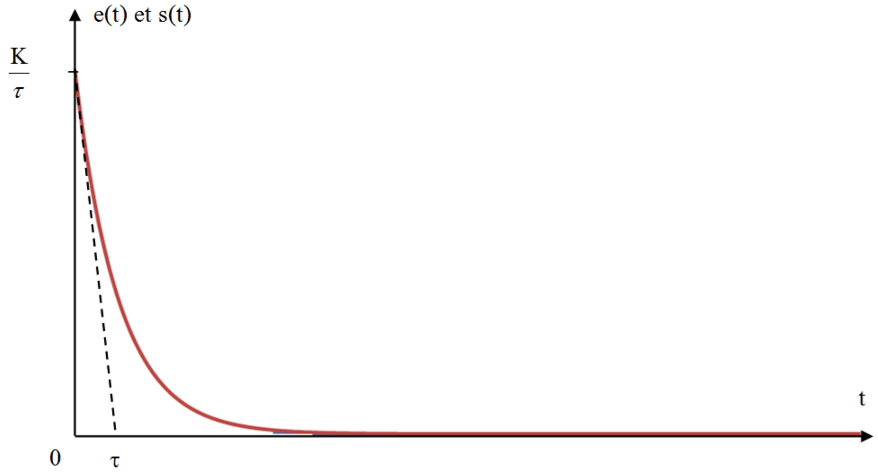
La réponse **impulsionnelle** est celle du système à une entrée $e(t) = \delta(t)$.

La réponse temporelle à une entrée de type distribution de Dirac (réponse impulsionnelle) d'un système du premier ordre est :

$$s(t) = \frac{K}{\tau}\, e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t)$$

Allure de la réponse impulsionnelle

Fondamental



Réponse impulsionnelle d'un système de premier ordre

Tracé et propriétés remarquables

Fondamental

- Pour $t = \tau : s(\tau) = \frac{K}{\tau}(1 - 0.63)$
- Pour $t = 3 \cdot \tau : s(3\tau) = \frac{K}{\tau}(1 - 0.95)$
- La tangente à l'origine coupe l'axe des abscisses pour $t = \tau$.

1.3. Réponse indicielle (i.e. à un échelon)

Réponse indicielle

Az Définition

La réponse **indicielle** est celle du système à une entrée $e(t) = e_0\, u(t)$, avec :

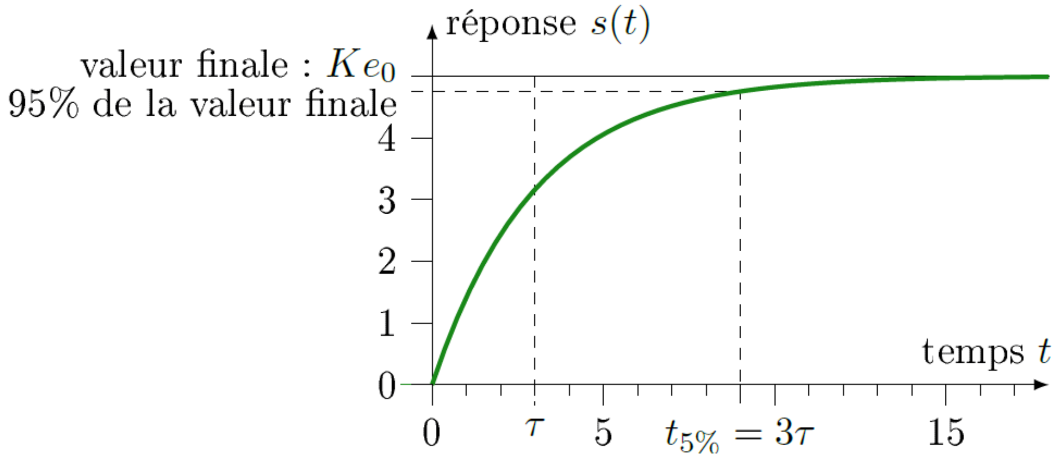
- e_0 : amplitude constante
- $u(t)$: fonction échelon

La réponse temporelle à une entrée en échelon (réponse indicielle) d'un système du premier ordre est :

$$s(t) = K\, e_0\, \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right] u(t)$$

Allure de la réponse indicielle

Fondamental

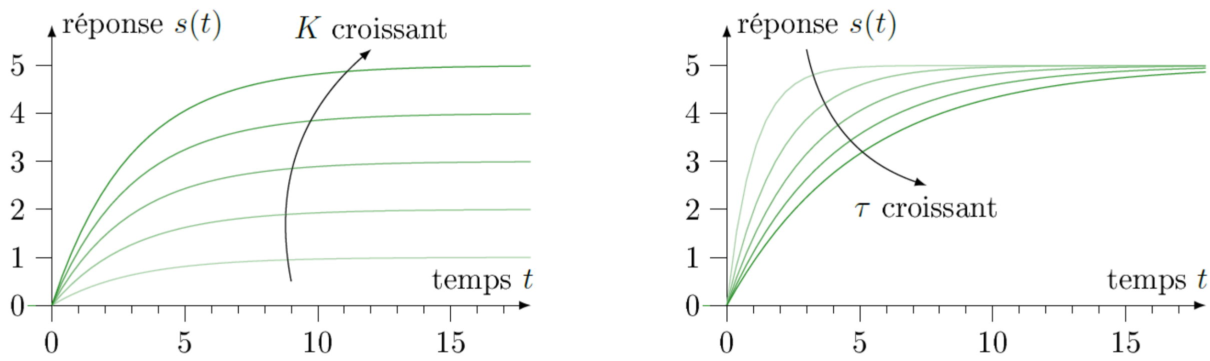


Réponse indicielle d'un système de premier ordre

Tracé et propriétés remarquables

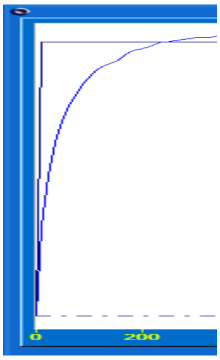
Fondamental

- La valeur finale (valeur asymptotique) est $s_\infty = K\ e_0$
- Pour $t = \tau$, la réponse atteint environ **63%** de la valeur finale car $s(\tau) = K\ e_0\ (1 - e^{-1}) = 0.6321\ s_\infty$
- Pour $t = 3\tau$, la réponse atteint **95%** de la valeur finale car $s(3\tau) = K\ e_0\ (1 - e^{-3}) = 0.9502\ s_\infty$; **on a donc** $t_{r5\%} = 3\tau$.
- La réponse indicielle **ne présente pas d'oscillations**. En effet, $s'(t) = \frac{Ke_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t) > 0\ \forall t$, donc $s(t)$ est **strictement croissante**.
- La **pente de la tangente à l'origine est non nulle** : $s'(0) = \frac{Ke_0}{\tau}$
- Plus τ est élevée, plus le système est lent.



Influence des paramètres du modèle du premier ordre sur la réponse indicielle

En travaux pratiques : articulation de bras robot Maxpid Exemple



Réponse indicielle du moteur du Maxpid

Valeur asymptotique de la réponse indicielle (i.e. entrée échelon d'amplitude e0) Remarque

Lorsque $t \to \infty$, la sortie $s(t)$ va se "stabiliser" autour d'une valeur constante.

La dérivée $\frac{d\,s(t)}{dt}$ va tendre vers 0 et l'équation différentielle (représentant donc le comportement du système) va devenir $s(t) = K\,e(t)$. La valeur asymptotique de la sortie sera donc le produit de K avec l'amplitude de l'échelon d'entrée e_0.

1.4. Réponse à une rampe

Réponse à une rampe Az Définition

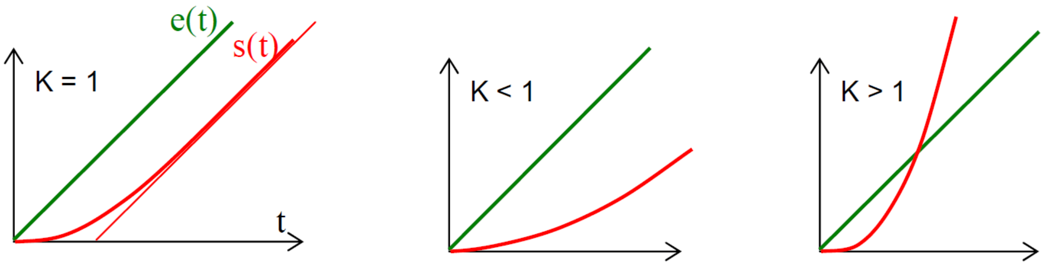
La réponse **à une rampe** est celle du système à une entrée $e(t) = a_0\,t\,u(t)$, avec :

- a_0 : pente constante
- $u(t)$: fonction échelon

La réponse temporelle à une entrée de type rampe d'un système du premier ordre est :

$$s(t) = K\,a_0\,\left(t - \tau + \tau\,e^{-\dfrac{t}{\tau}}\right)\,u(t)$$

Réponse à une rampe Fondamental



Réponse à une rampe d'un système de premier ordre

Tracé et propriétés remarquables

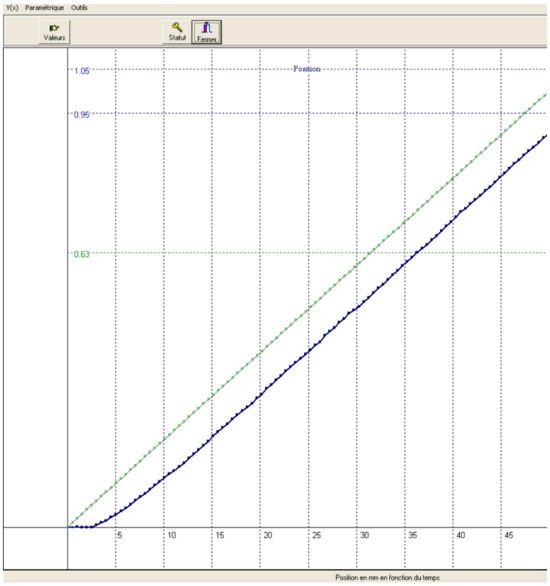
Fondamental

- La valeur finale (valeur asymptotique) est : $\lim_{t \to \infty} s(t) = \lim_{t \to \infty} K\, a_0\ \left(t - \tau + \tau\, e^{-\frac{t}{\tau}}\right) u(t) = +\infty$
- La **pente de la tangente à l'origine est nulle** : $s'(0) = K\, a_0\ \left(1 - e^{-\frac{0}{\tau}}\right) = 0$
- Lorsque t tend vers $+\infty$, le terme $\tau\, e^{-\frac{t}{\tau}}$ tend vers 0 ; ainsi l'asymptote de la réponse est $y(t) = K\, a_0\ (t - \tau)$.

  Cette droite est de pente $K\, a_0$, et coupe l'axe des abscisses en $t = \tau$.
- Suivant la valeur du gain statique K, la sortie peut "suivre" la rampe de l'entrée (avec un écart non nul mais constant), ou s'en écarter continuellement.

En travaux pratiques : plateforme six axes Stewart

Exemple



Réponse du moteur de la tige de vérin de la plateforme Stewart

2. Fonction de transfert

$\tau \frac{d\, s(t)}{dt} + s(t) = K\ e(t)$, donc $\tau\, p\ S(p) + S(p) = K\ E(p)$.

Forme canonique de la fonction de transfert d'un système de premier ordre

Fondamental

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau\, p}$$

avec :

K: gain statique

τ : constante de temps (en secondes)

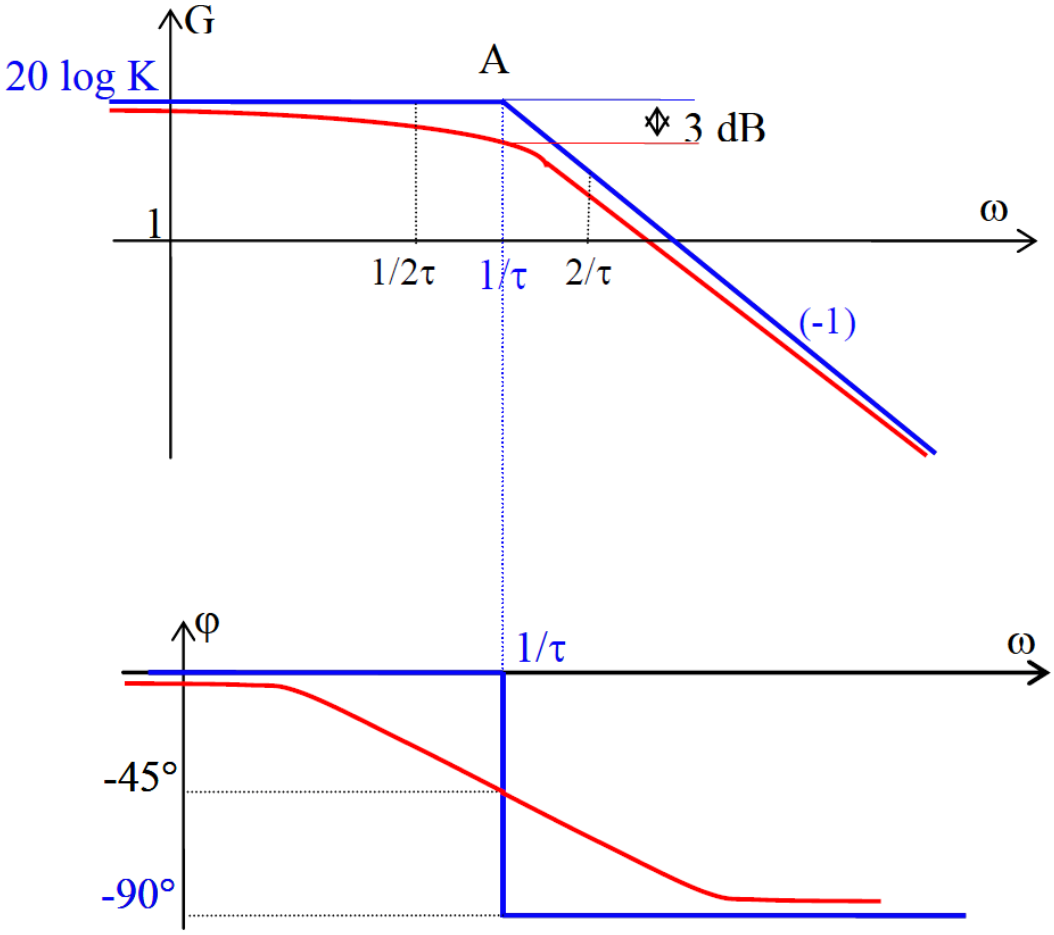
3. Réponse harmonique

$H(j\omega) = \frac{K}{1+j\,\omega\tau}$

$G = 20\log\frac{K}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} = 20\log K - 10\log(1+\omega^2\tau^2)$

$\varphi = \arg(K) - \arg(1+j\omega\tau) = -\arctan\omega\,\tau$

Diagramme de Bode



Bode : premier ordre (asymptotique et réel)

1. Diagramme asymptotique :
   - $\lim_{\omega\to 0} H(j\omega) = K$, donc G tend vers $20\log K$ et φ tend vers 0° (cf. système à action proportionnelle)
   - $\lim_{\omega\to\infty} H(j\omega) = \frac{K}{j\omega\tau}$, donc G est de pente "-1" , et φ tend vers -90° (cf. intégrateur pur)
   - la **pulsation de cassure** en A est $\omega = \frac{1}{\tau}$: $20\log K = 20\log K - 20\log\omega\tau \Rightarrow \omega\tau = 1$.
2. Diagramme réel :
   - $G_{(1/\tau)} = 20\log K - 10\log 2 = 20\log K - 3dB$
   - $G_{(1/2\tau)} = 20\log K - 10\log 1.25 = 20\log K - 1dB$
   - de même, pour $\omega = 2/\tau$, l'écart entre le gain asymptotique et le gain réel est de $-1dB$.
   - $\varphi_{1/\tau} = -\arctan 1 = -45^\circ$

"Inverse" d'un premier ordre

Remarque

La fonction de transfert d'un tel système est du type $1 + \tau.p$.

$H(j\omega) = 1 + j\,\omega\tau$

$G = 20\log\sqrt{1+\omega^2\tau^2} = 10\log(1+\omega^2\tau^2)$

$\varphi = \arctan\omega\,\tau$

Ainsi, la pulsation de cassure reste égale à l'inverse de la constante de temps, mais :

- la pente de l'asymptote est de **+**20dB/décade au lieu de -20 dB/décade
- la phase asymptotique est de **+**90° au lieu de -90°

VI Système de second ordre

1. Caractéristiques et réponse temporelle

1.1. Forme de l'équation différentielle

Az Définition

La forme générale de l'équation différentielle caractéristique d'un système du second ordre est :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{2m}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=K\,e(t)$$

avec :

- ω_0 la pulsation propre (non amortie) en rad/s
- m le coefficient d'amortissement, **positif et sans unité**
- K le gain statique (unité [s]/[e])

$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2}$ est bien homogène à $s(t)$ car $\frac{1}{\omega_0^2}$ en secondes au carré "compense" la division par dt^2
.

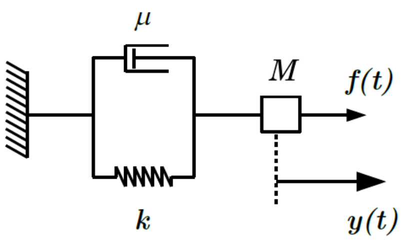
$\frac{2m}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt}$ est bien homogène à $s(t)$ car $\frac{2m}{\omega_0}$ en seconde "compense" la division par dt.

Remarque

Le coefficient d'amortissement peut être décrit par d'autres lettres : ξ, ζ, ϵ ou z. Le but est surtout d'**éviter la confusion** avec une autre grandeur qui pourrait avoir la même notation.

Mouvement d'une roue par rapport au châssis d'un véhicule Exemple

La roue d'un quad est reliée au châssis par l'intermédiaire d'un amortisseur et d'un ressort montés en parallèle. Ce système peut être modélisé par une masse reliée en série à un ressort et un amortisseur montés en parallèle. On note $f(t)$ la force exercée sur la masse M, et $y(t)$ la position de cette masse par rapport à la position d'équilibre.



Modélisation d'une des deux suspensions arrière du quad

En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique sur la masse M soumise à l'action du ressort ($-k\ y(t)$), de l'amortisseur ($-\mu\ \dot{y}(t)$) et à la force $f(t)$, on obtient l'équation :

$$M\ \ddot{y}(t) + \mu\ \dot{y}(t) + k\ y(t) = f(t)$$

En posant $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{M}{k}$, $\frac{2m}{\omega_0} = \frac{\mu}{k}$ et $K = \frac{1}{k}$, l'équation correspond à celle d'un système de second ordre :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{y}(t) + \frac{2m}{\omega_0}\dot{y}(t) + y(t) = K\ f(t)$$

Remarque

Lors de la résolution "mathématique traditionnelle" (solution particulière + solution homogène) de l'équation du système de second ordre, on obtiendra différents résultats suivant la valeur de m. En effet, les racines - notées p_1 et p_2 - du polynôme caractéristique associé à l'équation homogène pourront être :

- différentes et réelles si $m > 1$
- identiques et réelles ("racine double") si $m = 1$
- complexes conjuguées si $m < 1$

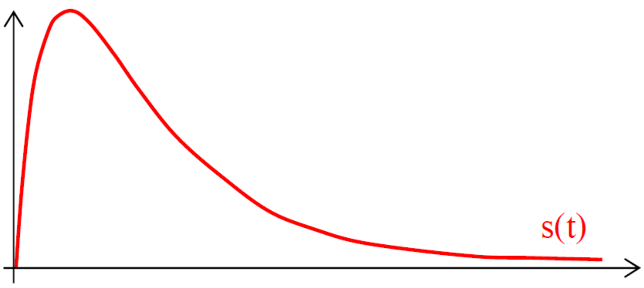
Les réponses d'un système de second ordre seront donc différentes suivant la valeur du coefficient d'amortissement m.

1.2. Réponse impulsionnelle

a) m > 1 : régime apériodique (ou amorti)

Si l'amortissement m est suffisamment grand (> 1), alors la réponse du système de second ordre est de la forme :

$$s(t) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{m^2 - 1}}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right)u(t)$$



Réponse impulsionnelle d'un second ordre amorti

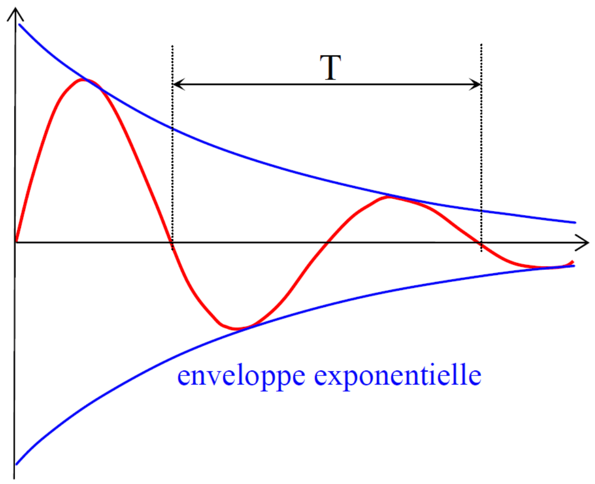
b) m = 1 : régime critique

L'allure de la réponse obtenue sera comparable à celle du régime apériodique. Il sera en revanche impossible dans la réalité d'avoir m exactement égal à 1.

c) m < 1 : régime pseudo-périodique

Si l'amortissement m est trop faible (< 1), alors la réponse du système de second ordre est de la forme :

$$s(t) = \frac{K\omega_0}{\sqrt{1-m^2}} e^{-m\,\omega_0\,t} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-m^2}\,t\right) u(t)$$



Réponse impulsionnelle d'un second ordre oscillant

La pseudo-période des oscillations vaut $T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}}$.

Cas où m=0 (pas d'amortissement) — Remarque

L'allure de la réponse obtenue serait une sinusoïde de pulsation ω_0.

1.3. Réponse indicielle

Réponse indicielle — Az Définition

La réponse **indicielle** est celle du système à une entrée $e(t) = e_0\,u(t)$, avec :

- e_0 : amplitude constante
- $u(t)$: fonction échelon

Valeur asymptotique de la réponse indicielle (i.e. entrée échelon d'amplitude e0) — Remarque

Lorsque $t \to \infty$, la sortie $s(t)$ va se "stabiliser" autour d'une valeur constante, qu'il y ait eu des oscillations ou non auparavant.

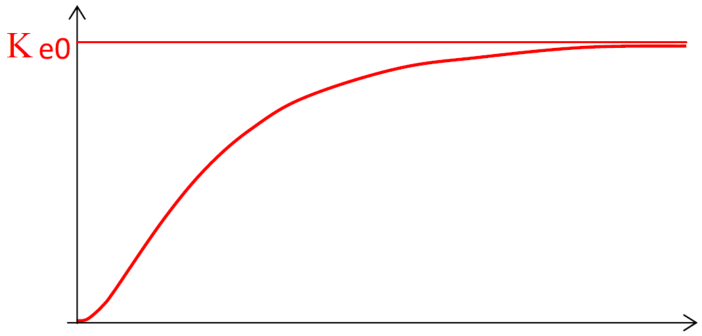
Les dérivées $\frac{d^2\,s(t)}{dt^2}$ et $\frac{d\,s(t)}{dt}$ vont tendre vers 0 et l'équation différentielle (représentant donc le comportement du système) va devenir $s(t) = K\,e(t)$. La valeur asymptotique de la sortie sera donc le produit de K avec l'amplitude de l'échelon d'entrée e_0.

a) m > 1 : régime apériodique (ou amorti)

Si l'amortissement m est suffisamment grand (> 1), alors la réponse du système de second ordre est de la forme :

$$s(t) = K\,e_0\left(1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2}\,e^{p_1 t} - \frac{p_1}{p_1 - p_2}\,e^{p_2 t}\right)\cdot u(t) = K\,e_0\left[1 + \frac{\omega_0}{2\sqrt{m^2-1}}\left(\frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2}\right)\right]u(t)$$

Réponse indicielle si m>1 — Fondamental

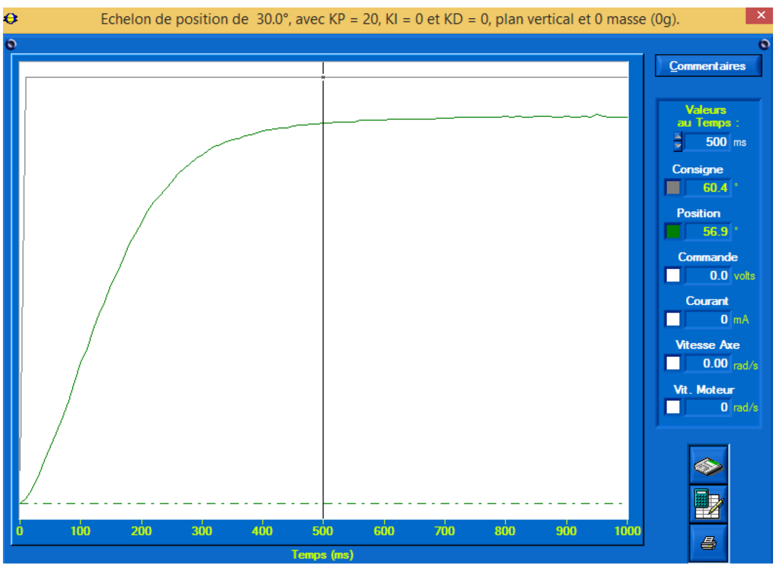


Réponse indicielle d'un système de second ordre amorti

Tracé et propriétés remarquables — Fondamental

- La valeur finale (valeur asymptotique) est $s_\infty = K\,e_0$
- La réponse indicielle **ne présente pas d'oscillations ni de dépassement**.
- La **pente de la tangente à l'origine est nulle** : $\lim_{t\to 0} s'(t) = \lim_{t\to 0} K\,e_0\left[\frac{\omega_0}{2\sqrt{m^2-1}}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right)\right]u(t) = 0$
- Plus m est **proche de 1**, plus le système est **rapide**.

Réponse indicielle de l'articulation de bras Maxpid — Exemple



Complément

Avec $\tau_1 = -\frac{1}{p_1}$ et $\tau_2 = -\frac{1}{p_2}$, l'expression $s(t) = K\ e_0\ \left(1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2}\ e^{p_1 t} - \frac{p_1}{p_1 - p_2}\ e^{p_2 t}\right) \cdot u(t)$ devient $s(t) = K\ e_0\ \left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1}\ e^{-t/\tau_1} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1}\ e^{-t/\tau_2}\right) \cdot u(t)$

Cela permet d'assimiler la réponse du système à celle d'un premier ordre si $\tau_1 \gg \tau_2$

b) m = 1 : régime critique

La solution complète est $s(t) = K\ e_0[1 - (\omega_0\ t + 1)e^{-\omega_0\ t}]\ u(t)$.

Fondamental

Les propriétés sont identiques à celles du régime apériodique, le régime critique étant le cas limite quand $m \to 1$. Il sera en revanche impossible dans la réalité d'avoir m exactement égal à 1.

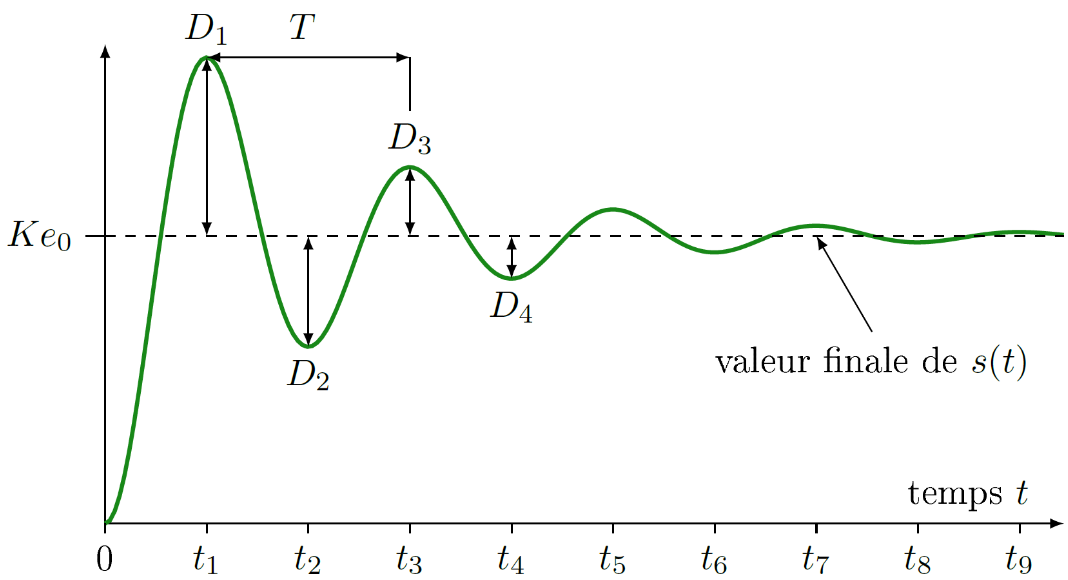
c) m < 1 : régime pseudo-périodique

Si l'amortissement m est trop faible (< 1), alors la réponse du système de second ordre est de la forme :

$$s(t) = K\ e_0\ \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}} e^{-m\omega_0 t} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1 - m^2}\ t + \arccos m\right)\right]$$

Réponse indicielle si m<1

Fondamental



Réponse indicielle d'un système de second ordre sous-amorti

Tracé et propriétés remarquables

Fondamental

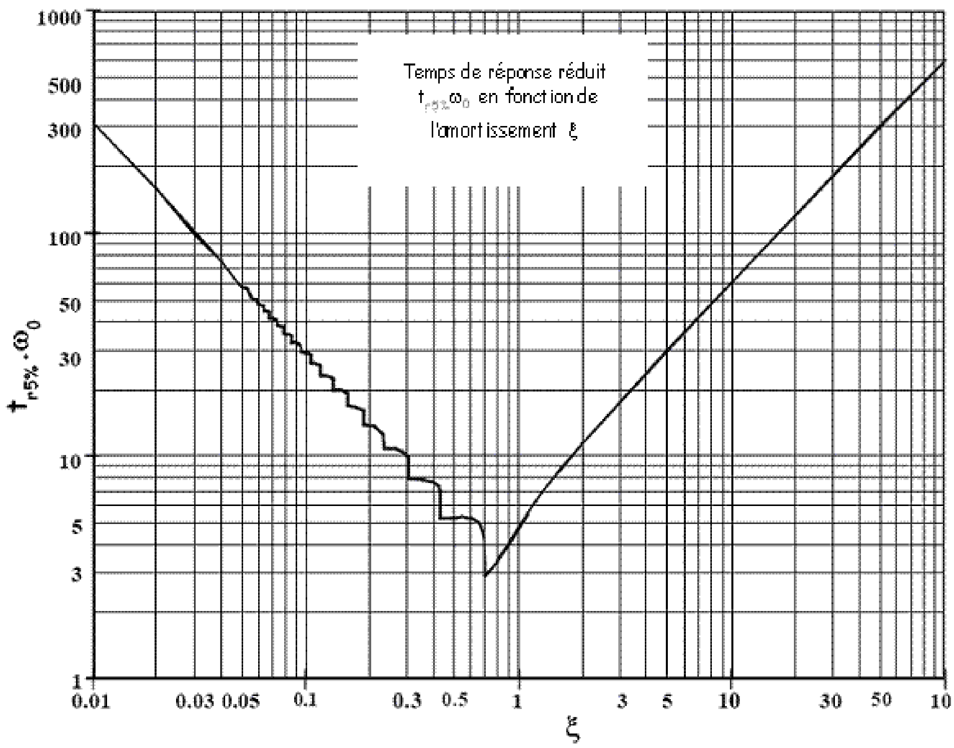
- La valeur finale (valeur asymptotique) est $s_\infty = K\, e_0$
- La réponse **présente des oscillations**. On note :
  - $\omega = \omega_0\sqrt{1-m^2}$ la pseudo-pulsation
  - $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}}$ la pseudo-période
- La réponse **présente des dépassements**. Ils sont caractérisés par :
  - l'instant du k^{eme} dépassement : $t_k = \frac{k\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}}$
  - le k^{eme} dépassement relatif $D_k^{\%} = \left|\frac{s(t_k)-s(\infty)}{s(\infty)}\right| = e^{\frac{-k\pi m}{\sqrt{1-m^2}}}$
- La **pente de la tangente à l'origine est nulle**

Temps de réponse d'un système de second ordre

Remarque

Il n'existe pas de formule simple pour calculer le temps de réponse à 5% car il dépend de la valeur du coefficient d'amortissement m et de la pulsation propre non amortie du système ω_0. On utilise alors un *abaque* *(cf. p.25)* (fourni par les énoncés) donnant la valeur du temps de réponse réduit $t_{5\%} \cdot \omega_0$ en fonction du coefficient d'amortissement m.

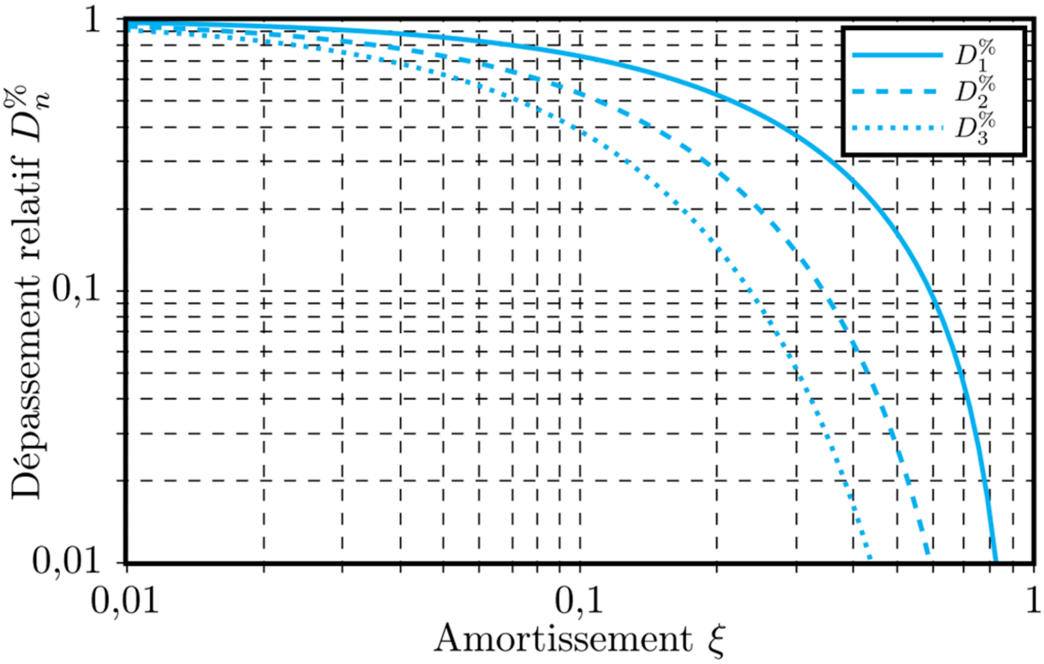
Le temps de réponse à 5% le plus faible est cependant obtenu pour $m = 0.69$. En effet, pour cette valeur, le premier dépassement relatif vaut $D_1^{\%} \approx 0.05$.



Abaque temps de réponse réduit pour second ordre

Évolution des dépassements en fonction de l'amortissement 💬 Remarque

Les dépassements relatifs **ne dépendent que de** m !



Abaque des dépassements relatifs selon l'amortissement

1.4. Réponse à une rampe

De manière similaire au système de premier ordre, la valeur de K conditionne la tendance de la réponse.

Si $K = 1$, la réponse restera parallèle à la rampe de l'entrée, et la valeur du coefficient d'amortissement aura les influences suivantes :

- la présence ou non d'oscillations ($m < 1$ ou $m > 1$)
- l'écart entre la rampe d'entrée et la rampe asymptotique de la réponse.

2. Fonction de transfert

$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2\,s(t)}{dt^2} + \frac{2m}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K\,e(t)$,

donc $\frac{1}{\omega_0^2}p^2\;S(p) + \frac{2m}{\omega_0}\;p\;S(p) + S(p) = K\;E(p)$.

Forme canonique de la fonction de transfert d'un système de second ordre 💡 Fondamental

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}\;p^2}$$

avec :

- K: gain statique
- ω_0 : pulsation propre (en radians par seconde)
- m : coefficient d'amortissement (sans unité)

Remarque :

Le polynôme de degré 2 au dénominateur peut s'écrire $(p - p_1) \cdot (p - p_2)$ avec p_1 et p_2 les **pôles** de la fonction de transfert.

3. Calcul des pôles d'un second ordre et représentation dans le plan complexe

Discriminant

Le polynôme du dénominateur peut s'écrire $p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2$.

Le discriminant $\Delta = 4\omega_0^2(m^2 - 1)$.

Les **pôles** de la fonction de transfert de second ordre **dépendent** donc de la valeur du **coefficient d'amortissement** m; il y a **trois cas de figure** possibles.

3.1. Cas où m>1, discriminant positif

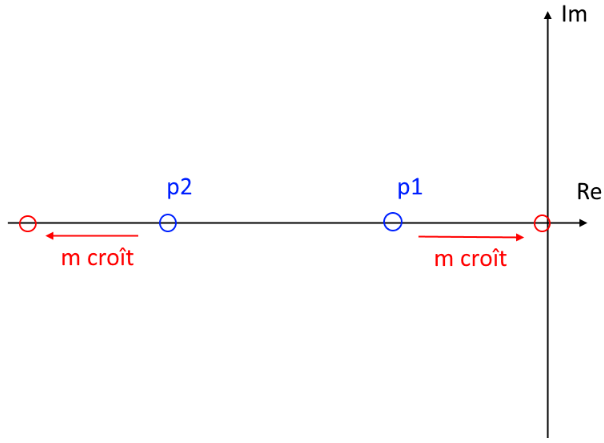
$p_1 = -m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2 - 1}$

$p_2 = -m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2 - 1}$

Les pôles sont **deux réels négatifs**.

Représentation dans le plan complexe

Lorsque m tend vers ∞, p_1 tend vers 0 et p_2 tend vers $-\infty$.



Deux pôles réels négatifs

Remarque

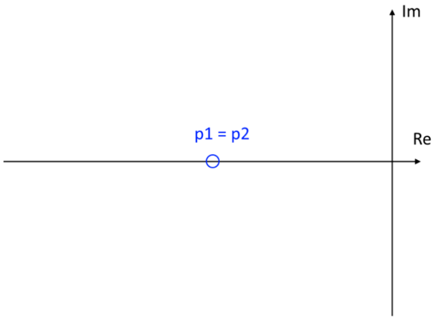
$p_1 \cdot p_2 = \omega_0^2$

3.2. Cas où m=1, discriminant nul

$p_1 = p_2 = -\omega_0$

Les deux pôles sont **réels confondus**.

Représentation dans le plan complexe



Deux pôles réels confondus

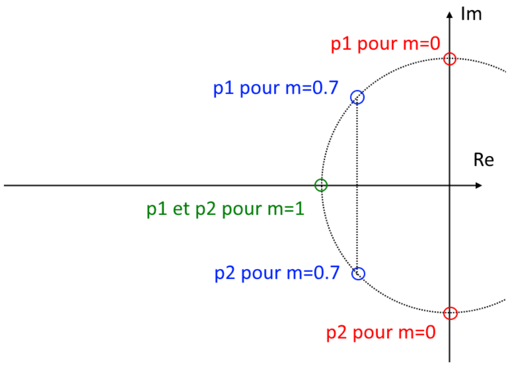
3.3. Cas où m<1, discriminant négatif

On pose $\Delta = 4\omega_0^2\, j^2(1-m^2)$.

$p_1 = -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-m^2}$

$p_2 = -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-m^2}$

Les deux pôles sont **deux complexes conjugués**.



Pôles complexes conjugués

Remarque

$|p_1| = |p_2| = \sqrt{Re^2 + Im^2} = \omega_0$

4. Réponse harmonique

$H(j\omega) = \dfrac{K}{1 + j\frac{2\,m\,\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \dfrac{K}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j\frac{2\,m\,\omega}{\omega_0}}$; on définit $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ appelée **pulsation réduite**.

4.1. Particularités

Module

$|H(ju)| = \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4m^2u^2}}$

Gain en dB

$G_{dB} = 20\log K - 10\log\left[\left(1-u^2\right)^2 + 4m^2u^2\right]$

Résonance du gain

La dérivée du module vaut : $\frac{d|H(ju)|}{du} = \frac{-K\left[-4u(1-u^2)+8m^2u\right]}{2\left[(1-u^2)^2+4m^2u^2\right]^{3/2}}$.

Elle s'annule si $-4u(1-u^2)+8m^2u=0$, c'est-à-dire si :

- $u=0$, donc $\omega=0$ (absurde)
- $u=\sqrt{1-2m^2}$, à condition que $1-2m^2>0$, c'est-à-dire si $m<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dans ces conditions, on dit qu'il y a **résonance** pour la pulsation de résonance $\omega_R=\omega_0\sqrt{1-2m^2}$.

On obtient $|H(j\omega_R)| = \frac{K}{2m\sqrt{1-m^2}}$.

Plus m est faible, plus la résonance est importante : on définit pour caractériser ce phénomène le **facteur de surtension** Q qui correspond au rapport du gain à la résonance sur le gain statique:

$Q = \frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$

Phase

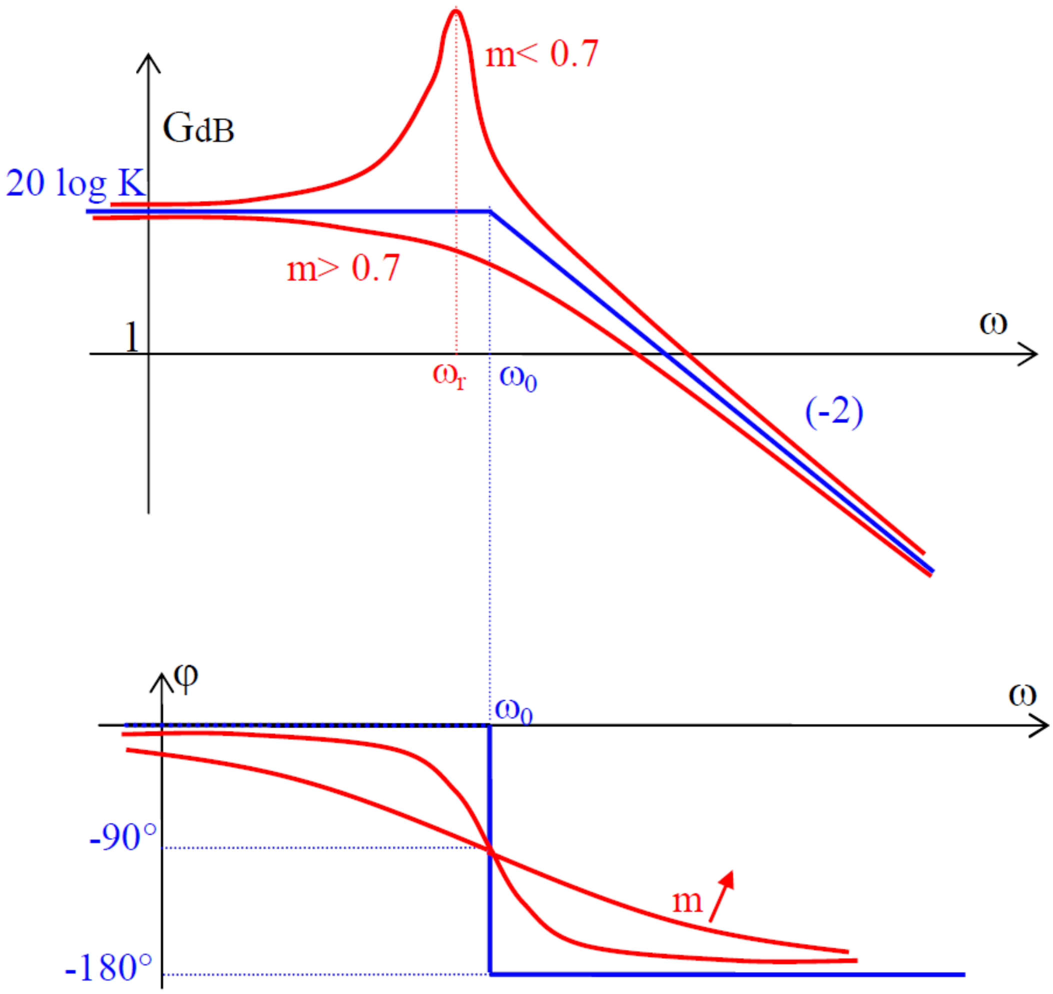
$\varphi = \arg\left(\frac{K}{(1-u^2)+j\,2mu}\right)$

Si $K>0$: $\varphi = -\arg\left((1-u^2)+j\,2mu\right)$.

Trois cas sont possibles :

- $u<1$ donc $\omega<\omega_0$: $\varphi = -\arctan\frac{2mu}{1-u^2}$
- $u=1$ donc $\omega=\omega_0$: $\varphi=-90^\circ$
- $u>1$ donc $\omega>\omega_0$: $\varphi = -\left(\arctan\frac{2mu}{1-u^2}+\pi\right)$

4.2. Diagramme de Bode



Bode : second ordre (asymptotique, résonant et non-résonant)

Lorsque ω tend vers 0 :

$G \to 20 \log K$ et $\varphi \to 0$

Lorsque ω tend vers ∞ :

$\left(1-u^2\right)^2 + 4m^2u^2 \to u^4$, donc $G_{dB} \to 20 \log K - 40 \log u$ et $\varphi \to -180^\circ$

La **pulsation de cassure** correspond à ω_0 : $20 \log K = 20 \log K - 40 \log u \Rightarrow u = 1$

Lorsque $\omega = \omega_0$:

$G_{dB} = 20 \log \frac{K}{2m}$ et $\varphi = -90^\circ$

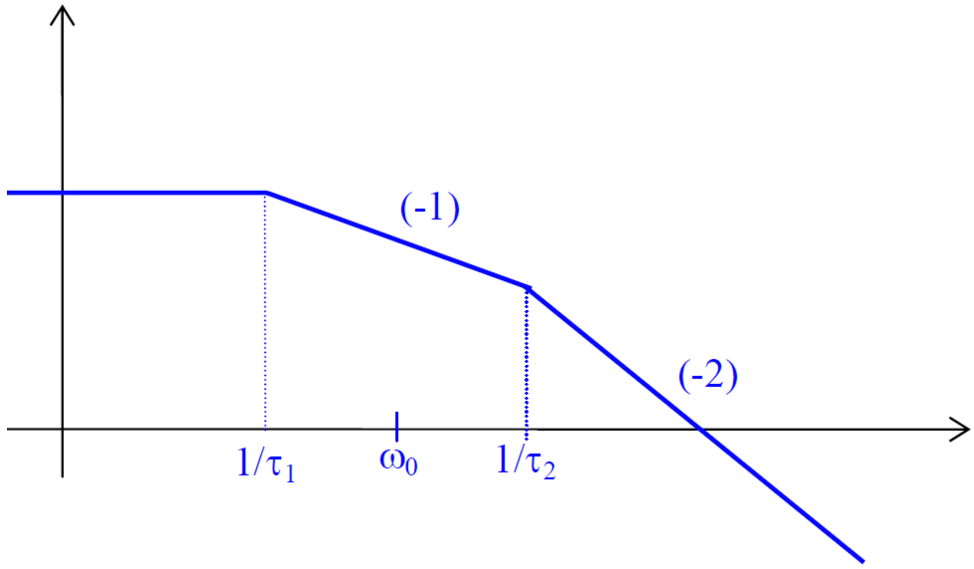
> Remarque
>
> La pulsation de résonance ω_R est forcément inférieure à la pulsation propre ω_0 : le pic de résonance, s'il existe, se situe donc **à gauche** de la cassure des asymptotes du gain.

Cas où m > 1

Dans le cas où $m > 1$, la fonction de transfert comporte deux pôles réels.

Elle peut donc être écrite de la façon suivante : $H(p) = \frac{K}{1+\tau_1\,p} \cdot \frac{1}{1+\tau_2\,p}$, c'est-à-dire comme le produit de deux fonctions de transfert de premier ordre.

Le diagramme asymptotique peut alors être tracé plus précisément, comme la superposition de deux diagrammes de premier ordre.



Bode : second ordre asymptotique lorsque m > 1

Par identification : $\tau_1 \cdot \tau_2 = \frac{1}{\omega_0^2}$, donc $\log 1/\tau_1 + \log 1/\tau_2 = 2 \log \omega_0$.

$\log \omega_0$ est donc "au milieu entre" $\log \frac{1}{\tau_1}$ et $\log \frac{1}{\tau_2}$

VII Différentes modélisations d'un même système

Introduction

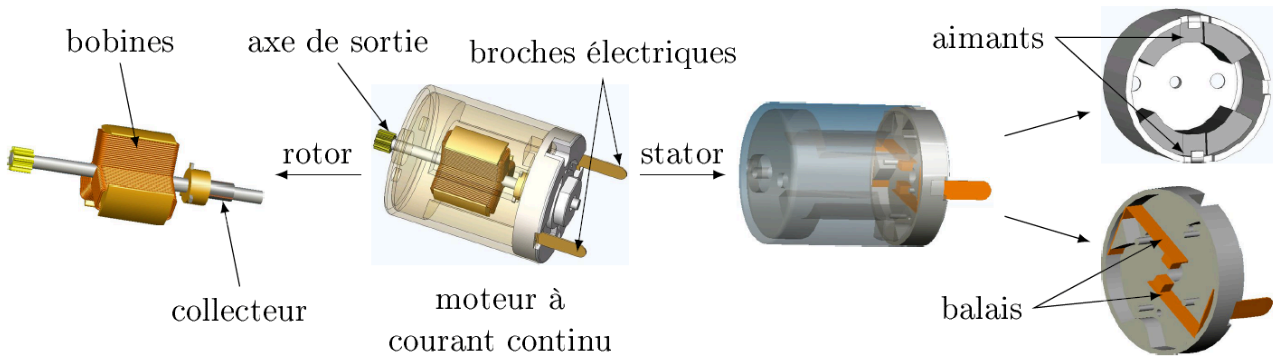
On peut adopter différentes modélisations d'un même système ; par exemple le moteur à courant continu.

1. Description d'une machine à courant continu

Une machine à courant continu est un convertisseur électro-mécanique composée généralement :

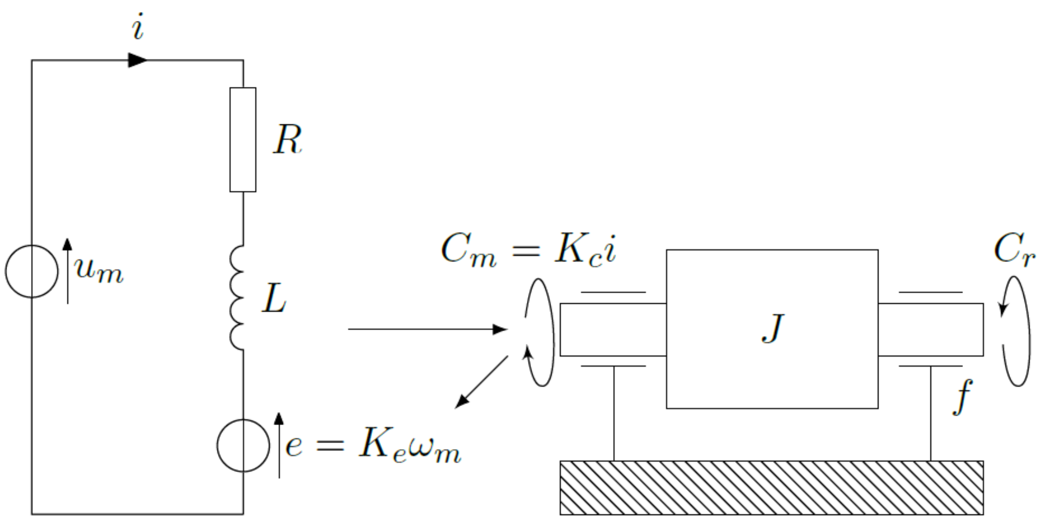
- d'aimants permanents sur le stator (puissance faible) ou d'un inducteur bobiné (forte puissance)
- d'un bobinage au rotor soumis à une tension continue

Un collecteur à balais permet d'alimenter une partie du bobinage du rotor de façon à ce que la force de Laplace exercée sur les conducteurs impose un couple moteur sur le rotor (action mécanique ayant tendance à faire tourner le rotor).



Architecture d'une machine à courant continu

La machine à courant continu est le siège de phénomènes électriques, magnétiques et mécaniques :



Modélisation électrique et mécanique d'une machine à courant continu

La modélisation des phénomènes conduit aux équations suivantes :

- $u_m(t) = R\,i(t) + L\,\frac{di(t)}{dt} + E(t)$ (loi des mailles)
- $J\,\frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t) - f\,\omega_m(t)$ (principe fondamental de la dynamique)
- $e(t) = K_e\,\omega_m(t)$ (couplage électromagnétique)
- $C_m(t) = K_c\,i(t)$ (couplage électromagnétique)

avec :

R : résistance du bobinage d'induit

L : inductance du bobinage d'induit

U_m : tension aux bornes de la machine à courant continu

i : intensité du courant absorbé par la machine

E : force contre-électromotrice due à la rotation

J : inertie mécanique à vaincre par la machine

f : frottement visqueux

C_m : couple électro-magnétique exercé par le stator sur le rotor

C_r : couple résistant en sortie

ω_m : vitesse de rotation

K_e et K_c : constantes de couplage électro-magnétique ($K_c = K_e$ généralement)

2. Différents niveaux de modélisation

> Remarque
>
> On fait ici l'hypothèse préliminaire que le moteur tourne à vide $(Cr(t) = 0)$ et que le frottement visqueux est négligeable ($f = 0$).

Inductance négligée

Si l'on considère que l'établissement du régime permanent dans le circuit électrique est bien plus rapide que l'établissement du régime permanent mécanique, on néglige l'inductance L et l'on obtient :

$$u_m(t) = K\,\omega_m(t) + \frac{R}{K}\left(J\,\frac{d\omega_m(t)}{dt}\right)$$

Cela correspond à un système de premier ordre.

Inductance non négligée

En revanche, si L n'est pas négligée :

$$u_m(t) = K\,\omega_m(t) + \frac{R}{K}\left(J\,\frac{d\omega_m(t)}{dt}\right) + \frac{L}{K}\left(J\,\frac{d^2\omega_m(t)}{dt^2}\right)$$

Cela correspond à un système de second ordre.

Angle de rotation

Par ailleurs, si l'on souhaite obtenir l'angle θ_m plutôt que la vitesse ω_m pour traduire le mouvement de rotation du rotor, cela donne (avec $\omega_m(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt}$) :

$$u_m(t) = K\,\frac{d\theta_m(t)}{dt} + \frac{R}{K}\left(J\,\frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2}\right) + \frac{L}{K}\left(J\,\frac{d^3\theta_m(t)}{dt^3}\right)$$

Cela correspond à un système de troisième ordre.

Remarque

L'**ordre** de l'équation différentielle d'un système dépendra :

- du choix de l'entrée et de la sortie
- de la **finesse** de la modélisation

Tout n'est que question de compromis : c'est la **comparaison** entre le **modèle** et des **résultats expérimentaux** qui validera les choix adoptés.