Modélisation des actions mécaniques : définitions et modèle local

Table des matières

I Définition des actions mécaniques

Az Définition

On appelle action mécanique toute **cause** susceptible de maintenir au repos, de mettre en mouvement, ou encore de déformer un **système matériel**.

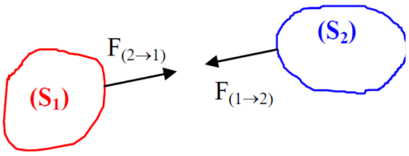
Un système matériel est composé de matière (solide ou fluide) dont la masse est **constante** (système à **masse conservative**).

Remarque

On ne détecte donc une action mécanique que par ses **effets** !

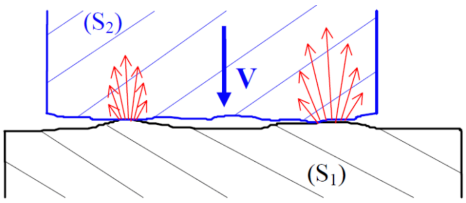
On distingue deux types d'actions mécaniques :

- les actions **volumiques** ou **à distance** qui s'exercent sans contact entre les solides : pesanteur ou actions électromagnétiques



Actions mécaniques à distance

- les actions **surfaciques** ou **de contact** : entre deux solides (ou un solide et un fluide) en contact.



Actions mécaniques de contact

II Le modèle local : au plus près de la réalité

Introduction

Il a pour but l'étude de l'action mécanique **dans la zone où elle s'exerce**.

Une action mécanique d'un ensemble matériel 1 sur un ensemble matériel 2 est alors représentée par un **champ de forces** : une **infinité** d'actions mécaniques (ou forces) **élémentaires** réparties sur une portion de 2.

1. Modèle d'action mécanique

1.1. Force élémentaire

Az Définition

On appelle force élémentaire un vecteur relié à un point d' "application" P : $\overrightarrow{dF_{(P,\,1 \to 2)}}$

C'est donc un **vecteur glissant**, caractérisé par :

- son **point d'application** (noté souvent P, ou M...)
- sa **direction** et son **sens** : définis par un **vecteur** directeur **unitaire** $\vec{u}$
- sa **norme** : l'intensité de l'action mécanique élémentaire exprimée en **Newton** (N)

Remarque

Le vecteur glissant $\left(P, \overrightarrow{dF_{(S_1 \to S_2)}}\right)$ pourra être écrit plus simplement :

- $\overrightarrow{dF_{1 \to 2}}$ si l'on veut davantage préciser le sens de l'effort ("**qui** applique un effort **sur qui**")
- $\overrightarrow{dF_{(P)}}$ si l'on veut davantage préciser le point courant de l'application de la force élémentaire.

La droite $(P, \vec{u})$ est appelée ligne d'action, ou (droite) **support** de la force.

Le point de vue local correspond au **modèle proposé pour l'action mécanique concernant un point courant** (par exemple P).

Suivant la **forme géométrique du domaine** sur lequel est défini P, la **norme** de la force élémentaire $\overrightarrow{dF_{1\to 2}}$ varie :

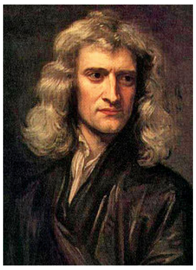
Nature du domaine	Élément géométrique infinitésimal	Densité d'effort	Unité de la densité d'effort	Norme de la force élémentaire
Ligne	dl	densité linéique q	N/m	$q\,dl$
Surface	dS	densité surfacique q (**pression**)	N/m^2 ou Pa (Pascal)	$q\,dS$
Volume	dV	densité volumique q	N/m^3	$q\,dV$

Remarque

En réalité, un contact s'exerce nécessairement sur une surface non nulle, afin que la pression ait une valeur limitée. Ainsi les deux solides seront localement réellement déformés.

Isaac Newton (1643 - 1727)

Complément



Philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome et théologien anglais.

En ce qui concerne la mécanique, il publie en 1687 son œuvre *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* dans laquelle il établit des lois "universelles" :

1. le principe d'inertie (un solide qui n'est soumis à aucune action mécanique est immobile ou en translation rectiligne uniforme)
2. le principe fondamental de la dynamique (l'accélération d'un corps dépend des actions mécaniques qu'il subit)
3. le principe des actions réciproques (un corps A exerçant une action mécanique sur un corps B subit une action mécanique d'intensité égale, de même direction mais de sens opposé, exercée par le corps B)

Blaise Pascal (1623 - 1662)

Complément

Mathématicien, physicien, inventeur, philosophe, moraliste et théologien français.

Outre des travaux relatifs aux mathématiques, il démontra (en se basant sur les travaux de Toricelli sur le vide) l'existence de la pression atmosphérique, le 19 septembre 1648 à Clermont Ferrand.

1.2. Notion de moment

Az Définition

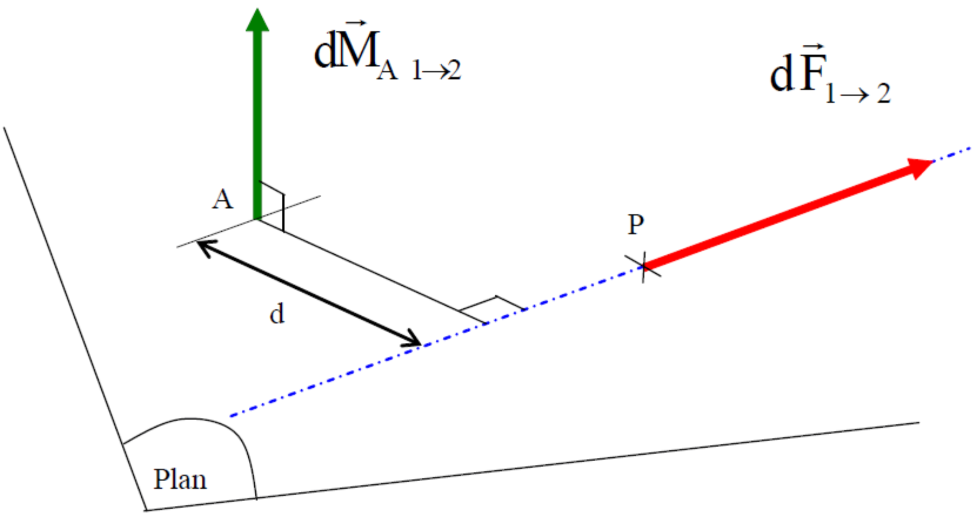
Le **moment en A** dû à l'action mécanique $\overrightarrow{dF_{1\to2}}$ est le **vecteur** $\overrightarrow{d\mathcal{M}_{A,1\to2}} = \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{dF_{1\to2}}$

Interprétation graphique du moment d'action mécanique

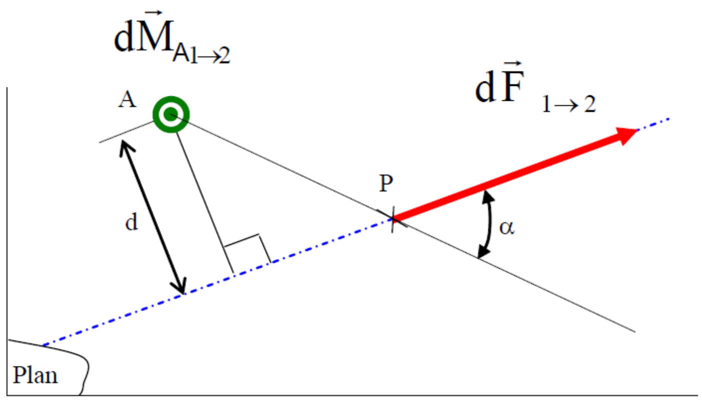
Complément

- un point d'application : le point A
- une direction : la perpendiculaire au plan $(A, \overrightarrow{dF_{1\to2}})$
- un sens : tel que le trièdre $\left(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{dF_{1\to2}}, \overrightarrow{d\mathcal{M}_{A,1\to2}}\right)$ soit direct
- un module ou norme : $||\overrightarrow{d\mathcal{M}_{A,1\to2}}|| = ||\overrightarrow{dF_{1\to2}}|| \cdot ||\overrightarrow{AP}|| \cdot |\sin\alpha| = d \cdot ||\overrightarrow{dF_{1\to2}}||$

Remarque : $d = ||\overrightarrow{AP}|| \cdot |\sin\alpha|$ est souvent appelé *« bras de levier »*.



(vue en perspective)



(vue normale au plan)

2. Modèle volumique

Introduction

Modèle utilisé pour représenter localement les actions mécaniques de **pesanteur** ou d'**origine électromagnétique**.

2.1. Action volumique

Expression de la force élémentaire — Fondamental

Produit de :

- densité d'effort : ici volumique $q_{(P)}$, en N/m^3
- élément géométrique infinitésimal : ici volumique dV
- vecteur unitaire $\overrightarrow{u_{(P)}}$

$\overrightarrow{dF_{(P)}} = q_{(P)} \cdot dV \cdot \overrightarrow{u_{(P)}}$

Force de pesanteur — Exemple

$\overrightarrow{u_{(P)}}$: dirigé vers le centre de la Terre, donc très souvent tracé selon la verticale descendante

$q_{(P)} = \rho_{(P)} \cdot g$ avec $\rho_{(P)}$: masse volumique en kg/m^3 au point P et g : accélération de la pesanteur.

3. Modèle surfacique sans frottement

Introduction

Modèle utilisé pour représenter localement les actions mécaniques de **contact** fluide / solide ou solide / solide si le **frottement** est **négligeable**.

3.1. Action surfacique sans frottement

Expression de la force élémentaire Fondamental

Produit de :

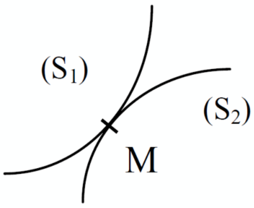
- densité d'effort : ici surfacique $p_{(M)}$ (**pression**), en N/m^2 ou Pa.
- élément géométrique infinitésimal : ici surfacique dS
- vecteur unitaire $\overrightarrow{n_{(M)}}$, **normal** au plan tangent commun en M, **orienté vers l'extérieur** du solide (ou élément de fluide) isolé, vers la "source" de l'effort

Donc : $\overrightarrow{dF_{(M)}} = -p_{(M)} \cdot dS \cdot \overrightarrow{n_{(M)}}$

Signe "moins" dans l'expression vectorielle Attention

Soient deux solides (ou particules de fluide) S_1 et S_2 en contact sur une surface dS.

En isolant l'un des solides (par exemple S_1), l'action que l'autre solide exerce sur lui est **dirigée vers l'intérieur du solide isolé** (de S_2 vers S_1 dans l'exemple considéré)

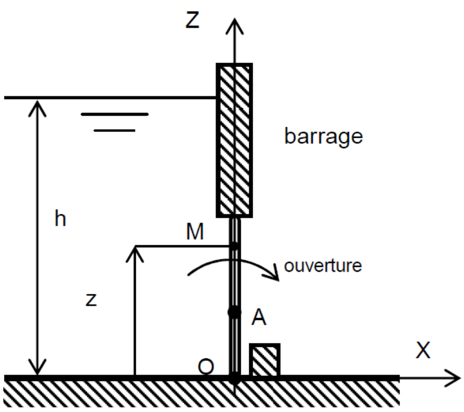


Contact entre solides

Ainsi, le signe "moins" est fondamental dans l'expression $-p_{(M)} \cdot dS \cdot \overrightarrow{n_{(M)}}$

3.2. Exercice : Force de pression hydrostatique

Soit une retenue d'eau de hauteur h exerçant une force sur une vanne de hauteur b (suivant $\vec{z}$) et de largeur $2L$ (suivant $\vec{y}$). On s'intéresse à un point M du barrage, situé à une hauteur $z_{(M)}$, en contact sur une surface dS avec une particule d'eau. Le point O est situé au milieu de l'arête basse de la vanne ($-L \leq y \leq L$)



Les lois de l'hydrostatique donnent $p_{(M)} = \rho_e \, g \, \left(h - z_{(M)}\right)$ avec ρ_e la masse volumique de l'eau, considérée comme constante, et $\left(h - z_{(M)}\right)$ la profondeur du point M.

Question

Donner l'expression (vectorielle) de la force élémentaire appliquée par l'**eau sur la vanne** en un point courant M.

Indice :

L'élément de surface infinitésimal pourra être précisé en fonction des vecteurs définissant le plan de contact eau / vanne.

4. Modèle surfacique avec frottement

Introduction

Modèle utilisé pour représenter localement les actions mécaniques de **contact** solide / solide en prenant en compte le **frottement sec**.

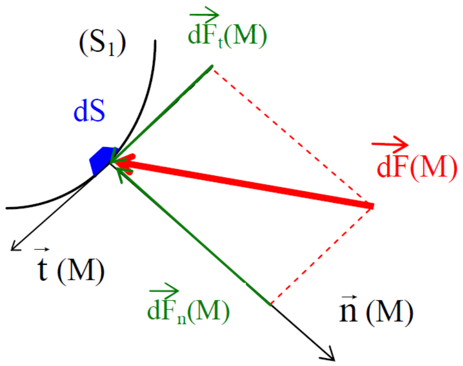
C'est un modèle **très fréquent** et courant pour tous les systèmes de freinage, d'embrayage, de limitation de couple, etc...

4.1. Action surfacique avec frottement

Attention

L'action mécanique en M (point au centre de la surface de contact) est décomposée en une composante **n**ormale et une composante **t**angentielle:

$\overrightarrow{dF_{(M)}} = \overrightarrow{dF_{n\,(M)}} + \overrightarrow{dF_{t\,(M)}}$



Expression de la composante normale

Fondamental

Produit de :

- densité d'effort : ici surfacique $p_{(M)}$ (**pression**), en N/m^2 ou Pa.
- élément géométrique infinitésimal : ici surfacique dS
- vecteur unitaire $\overrightarrow{n_{(M)}}$, **normal** au plan tangent commun en M, **orienté vers l'extérieur** du solide (ou élément de fluide) isolé

Donc : $\overrightarrow{dF_{n\,(M)}} = -p_{(M)} \cdot dS \cdot \overrightarrow{n_{(M)}}$

Expression de la composante tangentielle

Fondamental

Produit de :

- densité d'effort : ici surfacique $q_{(M)}$ (répartition tangentielle d'effort), en N/m^2 ou Pa.
- élément géométrique infinitésimal : ici surfacique dS
- vecteur unitaire $\overrightarrow{t_{(M)}}$, **appartenant** au plan **tangent** commun en M, **de direction et de sens *a priori* quelconques.**

Donc : $\overrightarrow{dF_{t\,(M)}} = q_{(M)} \cdot dS \cdot \overrightarrow{t_{(M)}}$

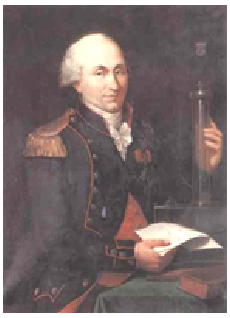
Remarque

Pas de signe "moins" par défaut dans l'expression de $\overrightarrow{dF_{t\,(M)}}$

4.2. Lois de Coulomb

Lois de Coulomb

Fondamental



Coulomb

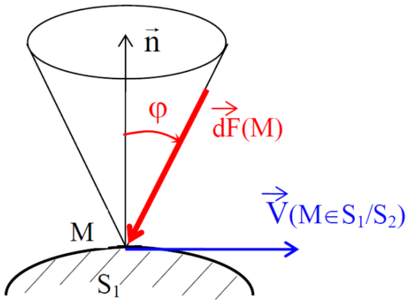
Ces lois font suite aux travaux initiés par Charles-Augustin Coulomb (1736 - 1806) sur le frottement entre solides.

Elles permettent de définir, dans le cas de deux solides en contact, $q_{(M)}$ et le **sens** de $\overrightarrow{t_{(M)}}$.

1. Premier cas : S_1, solide isolé, glisse par rapport à S_2 (phénomène de **glissement**)
   - $q_{(M)} = f \cdot p_{(M)}$ avec f : coefficient de frottement sec en M entre les deux solides en contact
   - $\overrightarrow{t_{(M)}}$ est **opposé** à la vitesse de glissement du point M appartenant à S_1 (solide isolé) par rapport à S_2 : $\overrightarrow{V(M \in S_1/S_2)}$
2. Deuxième cas : les deux solides en contact ne glissent pas (phénomène d'**adhérence**)
   - $q_{(M)} < f \cdot p_{(M)}$
   - $\overrightarrow{t_{(M)}}$ est de direction, et donc de sens, **inconnus**

Avec $f = tan\,\varphi = \frac{q_{(M)}}{p_{(M)}}$, on peut définir un **cône de frottement** de demi-angle au sommet φ dans lequel peut évoluer l'effort de contact.

- dans le cas du **glissement**, l'effort est **sur la surface** du cône (et l'on connaît exactement sa position grâce à la direction et au sens de la composante tangentielle)
- dans le cas de l'**adhérence**, l'effort est **dans** le cône (et l'on ne connaît pas sa position exacte)



Cône de frottement en cas de glissement

Attention

L'effort de contact ne peut donc **jamais sortir** du cône !

Quelques valeurs du coefficient de frottement sec

Exemple

La valeur du coefficient de frottement sec ne dépend majoritairement que :

- des **matériaux** en contact
- de leur **état de surface**
- des conditions de **lubrification**

Matériaux en contact	f
acier / glace mouillée	0.01
acier / PTFE (Teflon®)	0.05
bronze / acier	0.1
acier / acier	0.15
bronze / bronze	0.2
acier / garniture de friction (frein, embrayage...)	0.2 - 0.4
pneu / chaussée (mouillée à sèche)	0.2 - 2

Remarque

L'étude des phénomènes de frottement (**tribologie**) est complexe : les lois de Coulomb sont à considérer comme un **modèle de base** qui n'est pas forcément valable dans le cas d'études poussées.

⚠ Attention

Dans le modèle des lois de Coulomb, le coefficient de frottement sec :

- **ne dépend pas** de la vitesse de glissement (contrairement au frottement visqueux)
- **ne dépend ni** de la forme des surfaces de contact, de leurs dimensions, ni encore des pressions de contact.

Différence entre coefficient de frottement de glissement et celui d'adhérence

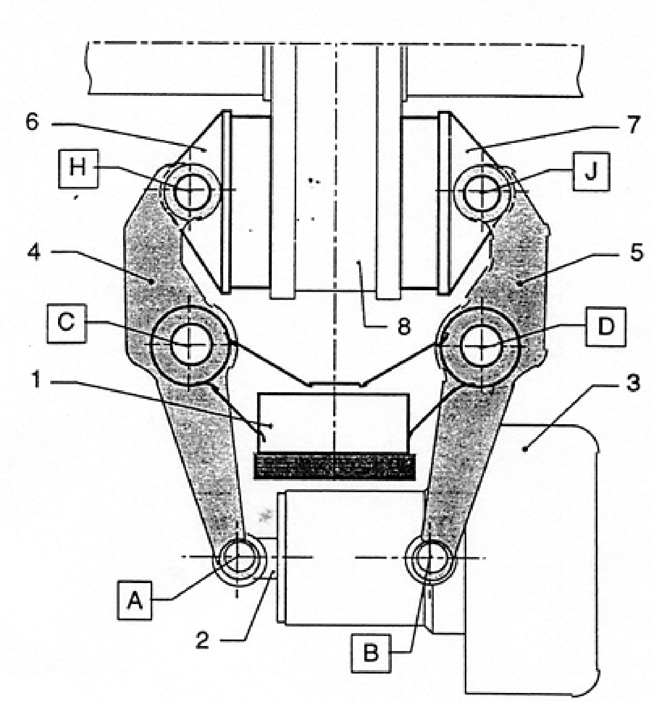
⊕ Complément

On peut complexifier le modèle des lois de Coulomb en prenant en compte la légère différence entre la valeur de f pour le glissement et celle de f pour l'adhérence.

Pour la **plupart** des couples de matériaux, le coefficient de frottement de **glissement est plus faible** que celui d'adhérence : une fois qu'on a poussé suffisamment une armoire pour vaincre son adhérence au sol, il est plus facile de la maintenir en mouvement.

4.3. Exercice : Frein de TGV

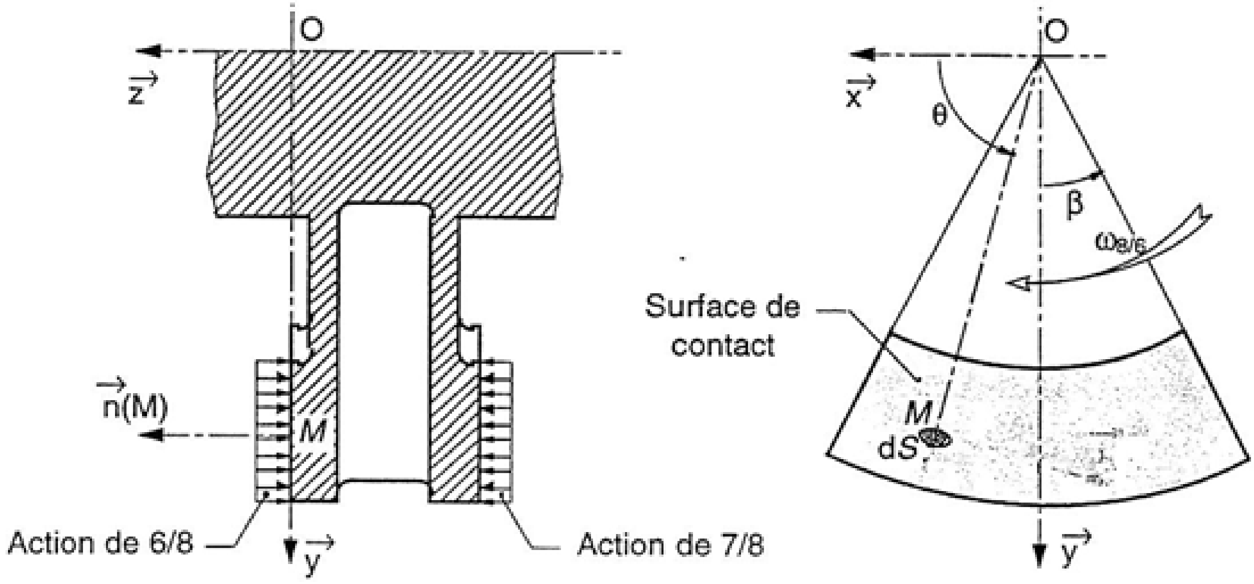
Ce frein est composé d'un vérin hydraulique flottant (2,3) agissant sur deux leviers mobiles (4) et (5) en rotation par rapport au châssis (1) et assurant l'effort presseur des plaquettes (6) et (7) sur le disque (8).



Connaissant la pression de contact entre les plaquettes et le disque (considérée comme uniforme : $p(M) = p_0$, avec p_0 constante), l'objectif est ici de déterminer le modèle local des actions mécaniques exercées par la plaquette (6) sur le disque (8).

Les plaquettes de frein sont des sections circulaires d'angle 2β, de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 : $\frac{\pi}{2} - \beta \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \beta$ et $R_1 \leq r \leq R_2$.

Le coefficient de frottement entre les plaquettes de frein et le disque est noté f.



Question

En faisant l'hypothèse que le système est en cours de glissement, donner l'expression de la force élémentaire exercée par la plaquette (6) sur le disque (8) au point M.

Indice :

Décomposer en composante normale et tangentielle. La surface de contact étant de forme circulaire, le système de coordonnées polaires est tout indiqué.

5. Modèle linéique

Introduction

Modèle utilisé parfois dans le cas où la surface de contact peut être assimilée à une ligne (droite ou non).

5.1. Action linéique (avec ou sans frottement)

On se base sur le modèle de l'action surfacique et l'on remplace :

- la ou les densités surfaciques d'effort (N/m^2) par des **densités linéiques** d'effort (N/m)
- l'élément de surface infinitésimal (m^2) par un **élément de longueur** infinitésimal (m)

5.2. Exercice : Compacteur

On considère un compacteur vibrant de masse M et l'on souhaite modéliser les actions mécaniques exercées **par le sol sur le cylindre avant** (de longueur L). Celui-ci est en train de tourner selon un axe vertical (ceci afin de modifier la direction de roulage du compacteur).

On fait les hypothèses suivantes :

- coefficient de frottement sec sol / cylindre : $f = 0.3$
- pression linéique de contact p_0, avec la moitié du poids du compacteur complet supportée par le cylindre avant.

Question 1

Exprimer la pression de contact p_0 en fonction de la masse du compacteur, de l'accélération de la pesanteur terrestre, et de la longueur du cylindre avant.

Force élémentaire

On choisit un repère $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ placé de la manière suivante :

- origine A située au milieu de la ligne de contact entre le cylindre et le sol
- $\vec{z}$ vertical ascendant
- $\vec{x}$ dirigé vers l'avant

Le cylindre est en train de tourner positivement suivant $\vec{z}$ (c'est-à-dire de $\vec{x}$ vers $\vec{y}$).

Question 2

Donner l'expression de la force élémentaire en un point P de la ligne de contact.

Indice :

Penser au modèle avec frottement :

- la composante normale, dirigée vers le solide isolé, donc ici le cylindre
- la composante tangentielle, s'opposant au mouvement du solide isolé, donc ici celui du cylindre par rapport au sol

Indice :

La ligne de contact a la même direction que celle de $\vec{y}$. L'élément infinitésimal de longueur sera donc dy.